ARITHMETIQUE PARTIE 2

Chapitre 3

PGCD, PPCM, théorème de Bézout, théorème de Gauss

Arithmétique partie 2

PGCD, PPCM, THEOREME DE BEZOUT, THEOREME DE GAUSS

I. PGCD

1. Définition

Soit a et b deux nombres entiers non nuls. Alors le plus grand diviseur commun des deux nombres a et b est noté $PGCD(a;b)$.

Exemple

Propriété

Soit k un entier naturel non nul, alors on a : $PGCD(ka;kb) = k \times PGCD(a;b)$

2. Nombres premiers entre eux

Définition

On dit que deux nombres a et b sont premiers entre eux si et seulement si :

$$PGCD(a;b) = 1$$

Remarque

Il ne faut pas confondre nombres premiers entre eux et nombres premiers. En effet, 32 et 33 ne sont pas premiers car ils sont respectivement divisibles par 2 et 3. En revanche, 32 et 33 sont premiers entre eux car leur PGCD vaut 1.

3. Algorithme d'Euclide

L'algorithme d'Euclide permet de trouver « à la main » le PGCD de deux entiers. On souhaite déterminer le PGCD de 32 et 44. Alors on fait la division euclidienne du plus grand nombre par le plus petit :

$$44 = 32 \times 1 + 12$$

On réalise ensuite la division euclidienne du diviseur de cette première division par son reste :

$$32 = 12 \times 2 + 8$$

On répète la dernière opération jusqu'à trouver un reste nul :

$$12 = 8 \times 1 + \mathbf{4}$$
$$8 = 4 \times 2 + 0$$

Dès lors le $PGCD(32;44) = 4$

II. PPCM

Définition

Soient a et b deux entiers non nuls. Alors le PPCM de a et b noté $PPCM(a;b)$ est le plus petit multiple commun à a et b.

Exemple

Propriété

$$ab = PPCM(\mathrm{a};\mathrm{b}) \times \mathrm{PGCD}(\mathrm{a};\mathrm{b})$$

Illustration

III. THEOREME DE BEZOUT

1. Egalité de Bézout

Soient a et b deux entiers non nuls. On pose $D = PGCD(a;b)$. Dès lors il existe un couple d'entiers $(u;v)$ tels que :

$$au + bv = D$$

Démonstration (importance : haute)

2. Théorème de Bézout

Soient a et b deux entiers. Alors a et b sont premiers entre eux si et seulement s'il existe deux entiers u et v tels que :

$$\boldsymbol{au + bv = 1}$$

Démonstration ROC (importance : haute)

3. Corollaire du théorème de Bézout

L'équation $\boldsymbol{ax + by = c}$ admètent des solutions entières si et seulement si $\boldsymbol{c}$ est un multiple de $\boldsymbol{PGCD(a;b)}$.

Démonstration (importance : haute)

IV. THEOREME DE GAUSS

Théorème

> Soients a, b et c trois entiers non nuls. Si a divise bc et si a et b sont premiers entre eux alors a divise c.

Démonstration ROC (importance : très haute)

Corollaire du théorème de Gauss

> Soient a, b et c trois entiers non nuls. Si b et c divisent a, et si b et c sont premiers entre eux, alors bc divise a.

Démonstration ROC