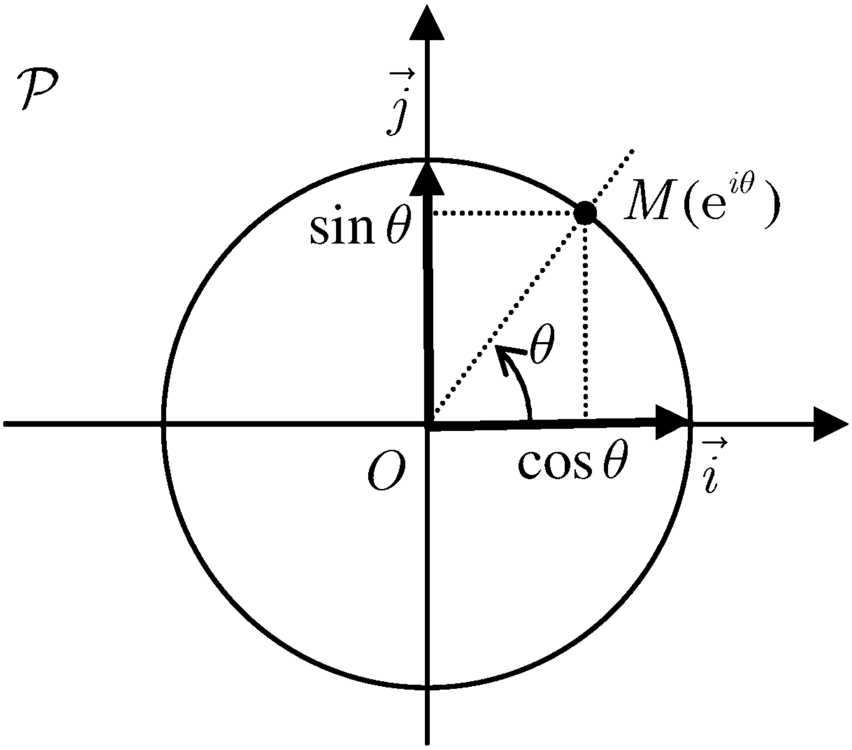
COMPLEXES PARTIE 2



Chapitre 5

Complexes partie 2

Complexes partie 2

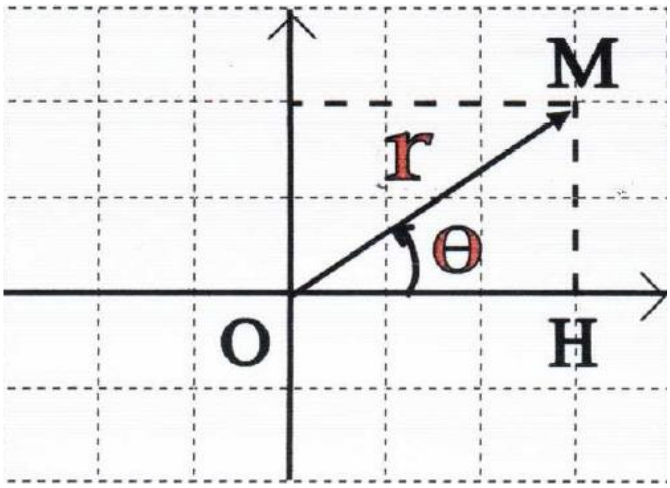
COMPLEXES PARTIE 2

I. FORME TRIGONOMETRIQUE

1. Module et argument

Définitions

Soit P le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$. Soit M le point d'affixe $z = a + ib$. Ainsi, M a pour coordonnées $M(a\,;b)$.



Le module de z noté $|z|$ correspond géométriquement à la distance OM. On note :

$$|z| = OM$$

De plus, l'argument de z (différent de 0) noté $\arg(z)$ correspond géométriquement à l'angle orienté $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$.

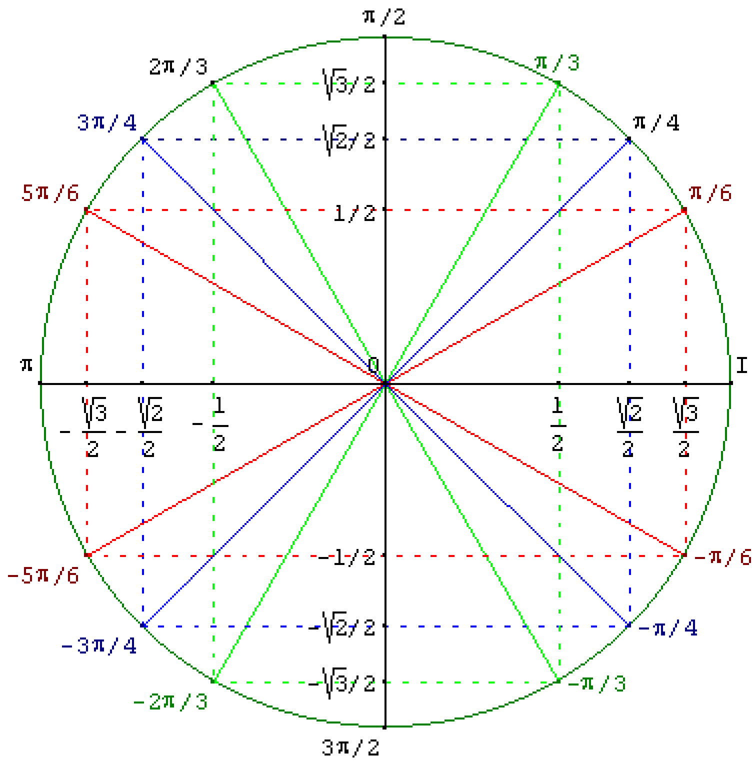
Remarques :

Le nombre complexe 0 n'a pas d'arguments mais possède un module égal à 0.
Le module d'un nombre est toujours positif.
Un nombre complexe non nul possède une infinité d'arguments du fait de la cyclicité du cercle trigonométrique.

Dans la pratique ça donne quoi ?

Dans les exercices vous serez amenés à calculer le module et l'argument de différents nombres complexes. Pour cela il suffit pour d'appliquer les formules suivantes :

- Pour le module : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ où a et b sont des nombres réels correspondant respectivement à la partie réelle et la partie imaginaire du nombre z.
- Pour l'argument c'est un peu plus compliqué :



2. Forme trigonométrique

Définition

Tout nombre complexe, peut s'écrire sous la forme :

$$z = r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$$

Cette forme s'appelle la forme trigonométrique du nombre complexe z.

Justification

Propriété

Soient z et z' deux nombres complexes. On a alors :

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) = \arg(z') + 2k\pi \end{cases}$$

La démonstration est triviale et sera faite à l'oral.

Conjugué et forme trigonométrique

Soit $z = |z|\big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big)$ alors $\bar{z} = |z|\big(\cos(\theta) - i\sin(\theta)\big)$

3. Propriétés spécifiques aux arguments

- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$
- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$
- $\arg(z^n) = n \times \arg(z)$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$
- Soient A, B et C trois points du plan tels que leurs affixes sont égaux respectivement à a, b et c. On a alors : $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)[2\pi]$. *Cette propriété est très importante car elle est utile dans de nombreux exercices de bac.*

II. FORME EXPONENTIELLE

Définition

Tout nombre complexe peut s'écrire sous la forme :

$$z = |z|e^{i\theta}$$

Où :

$$\boldsymbol{e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)}$$

Propriété

Toutes les propriétés énoncées et démontrées dans le cadre du cours sur la fonction exponentielle sont applicables à l'exponentielle complexe comme si elle était réelle.

En fait, lorsque vous demanderez à votre professeur de mathématique pourquoi a-t-on le droit de noter $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, il vous répondra probablement que c'est juste une notation. Mais en réalité, parfois derrière les notations, peuvent se cacher des choses intéressantes. Ce qui va suivre est hors programme.

Justification que la notation est légitime

France métropolitaine 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (5 points) (commun à tous les candidats)

On désigne par (E) l'équation

$$z^4 + 4z^2 + 16 = 0$$

d'inconnue complexe z.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$.
Écrire les solutions de cette équation sous une forme exponentielle.

2) On désigne par a le nombre complexe dont le module est égal à 2 et dont un argument est égal à $\dfrac{\pi}{3}$.
Calculer a^2 sous forme algébrique.
En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$. On écrira les solutions sous forme algébrique.

3) Restitution organisée de connaissances

On suppose connu le fait que pour tout nombre complexe $z = x + iy$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, le conjugué de z est le nombre complexe $\overline{z}$ défini par $\overline{z} = x - iy$.

Démontrer que :

a) Pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$.

b) Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

4) Démontrer que si z est une solution de l'équation (E) alors son conjugué $\overline{z}$ est également une solution de (E).
En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E). On admettra que (E) admet au plus quatre solutions.