Corrigé, démonstration par récurrence et problème ouvert type bac

Démonstration par récurrence, généralité sur les suites, problème ouvert type bac

PLUSDEBONNESNOTES.COM

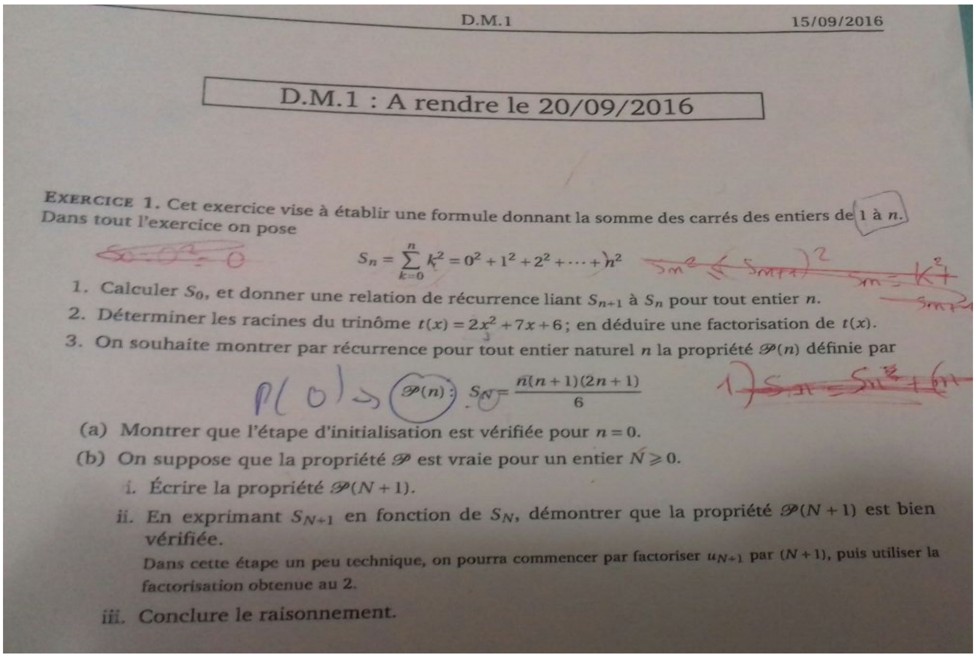
19 septembre 2017

Créé par : plusdebonnesnotes

Corrigé, démonstration par récurrence et problème ouvert type bac

Démonstration par récurrence, généralité sur les suites, problème ouvert type bac

ENONCE 1



D.M.1 15/09/2016

D.M.1 : A rendre le 20/09/2016

Exercice 1. Cet exercice vise à établir une formule donnant la somme des carrés des entiers de 1 à n. Dans tout l'exercice on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$$

1. Calculer S_0, et donner une relation de récurrence liant S_{n+1} à S_n pour tout entier n.
2. Déterminer les racines du trinôme $t(x) = 2x^2 + 7x + 6$; en déduire une factorisation de $t(x)$.
3. On souhaite montrer par récurrence pour tout entier naturel n la propriété $\mathscr{P}(n)$ définie par

$$\mathscr{P}(n) : S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(a) Montrer que l'étape d'initialisation est vérifiée pour $n = 0$.

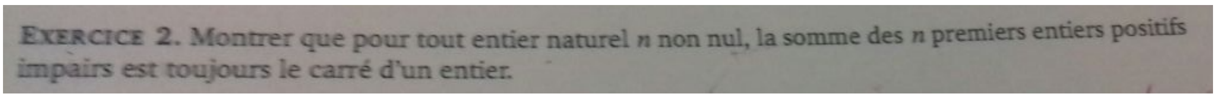
(b) On suppose que la propriété $\mathscr{P}$ est vraie pour un entier $N \geqslant 0$.

i. Écrire la propriété $\mathscr{P}(N+1)$.

ii. En exprimant S_{N+1} en fonction de S_N, démontrer que la propriété $\mathscr{P}(N+1)$ est bien vérifiée.
Dans cette étape un peu technique, on pourra commencer par factoriser u_{N+1} par $(N+1)$, puis utiliser la factorisation obtenue au 2.

iii. Conclure le raisonnement.

ENONCE 2



Exercice 2. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, la somme des n premiers entiers positifs impairs est toujours le carré d'un entier.

SOLUTION DE L'ENONCE 1 DETAILLE ET REDIGEE

1. D'après l'énoncé calculons S_0 :

$$S_0 = \sum_{k=0}^{0} k^2 = 0^2 = 0$$

Ecrivons la explicitement la somme S_{n+1} :

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} k^2 = 0^2 + 1^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2$$

On remarque que dans la somme S_{n+1}, $0^2 + 1^2 + \cdots + n^2 = S_n$, on en déduit :

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} k^2 = 0^2 + 1^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2$$

$$\boldsymbol{S_{n+1} = S_n + (n+1)^2}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose le polynôme suivant : $t(x) = 2x^2 + 7x + 6$. Pour déterminer ses racines, calculons sont discriminant noté Δ :

$$\Delta = 7^2 - 4\times2\times6 = 49 - 48 = 1 > 0$$

Donc t admet deux racines distinctes :

$t_1 = \frac{-7-\sqrt{1}}{2\times2} = -2$ ou $t_2 = \frac{-7+\sqrt{1}}{2\times2} = -\frac{3}{2}$

On en déduit une factorisation du polynôme $t(x)$:

$t(x) = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x+2)$

$t(x) = (2x+3)(x+2)$

3. a.i. Vérifions si la propriété $\mathcal{P}_n$ est vérifiée au rang $n = 0$:

D'une part, nous avons déjà montré que $S_0 = 0$

D'autre part on a : $\frac{0(0+1)(2\times0+1)}{6} = 0$

Donc on peut dire que $S_0 = \frac{0(0+1)(2\times0+1)}{6}$, donc la propriété est initialisée.

b. On suppose que la propriété est vraie pour un entier $N \geq 0$. Explicitons la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$:

$S_{N+1} = \frac{(n+1)(n+1+1)(2\times(n+1)+1)}{6}$

$S_{N+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2\times n+2\times1+1)}{6}$

$S_{N+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

ii. Soit N un entier supérieur ou égal à 0. On a déjà montré que :

$S_{N+1} = S_n + (n+1)^2$

Or on suppose que la propriété est vraie à un rang $N \geq 0$, donc $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, on obtient donc :

$S_{N+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$ (on met au même dénominateur)

$S_{N+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6}$ (on factorise par $(n+1)$)

$S_{N+1} = \frac{(n+1)\left(n(2n+1)+6(n+1)\right)}{6}$ (on réduit le numérateur)

$S_{N+1} = \frac{(n+1)\left(2n^2+n+6n+6\right)}{6}$

$S_{N+1} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$ (or on a déjà montré que $t(x) = 2x^2 + 7x + 6 = (2x+3)(x+2)$) d'où :

$$S_{N+1} = \frac{(n+1)(2n+3)(n+2)}{6}$$

On peut donc bien affirmer que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.

iii. La propriété $\mathcal{P}_n$ étant initialisée au rang $n = 0$ et héréditaire car $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$ donc on peut dire que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

SOLUTION DE L'ENONCE 2 DETAILLE ET REDIGEE

Dans un premier temps, essayons d'écrire mathématiquement cette somme soit $n \in \mathbb{N}$, appelons S_n la somme des n premiers nombres impairs. Dès lors on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 2k + 1 = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 2n + 1$$

Essayez vraiment de comprendre pourquoi cette s'écrit comme ça ; pour cela il suffit de remplacer k par les entiers naturels successif et on obtient : $1 + 3 + \cdots + 2n + 1$.

Avec cette nouvelle écriture, on s'aperçoit que cette somme est la somme des termes d'une suite arithmétique *(à chaque terme, on ajoute toujours la même raison 2).* Or le cours nous donne la forme explicite de la somme des termes d'une suite arithmétique :

RAPPEL DE COURS

Soit $n \in N$, soit (U_n) une suite arithmétique. Alors il existe une formule pour calculer la somme de ses termes consécutifs :

$$\sum_{i=0}^{n} U_i = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n = (\textit{nombre de termes}) \times \frac{(\textit{premier terme} + \textit{dernier terme})}{2}$$

En appliquant ce résultat de cours on obtient :

$S_n = (n+1)\frac{(1+2n+1)}{2}$

$S_n = (n+1)\frac{(2n+2)}{2}$ (on factorise par 2)

$S_n = (n+1)\frac{2(n+1)}{2}$ (on simplifie par 2)

$S_n = (n+1)(n+1)$

$S_n = (n+1)^2$

Finalement nous avons bien montré que la somme des n premiers entier impairs est bien égal au carré d'un entier, ici en l'occurrence : $(n+1)^2$.

REMARQUE

Pour une démonstration absolument irréfutable *(en effet on a utilisé un résultat non démontré du cours)*, on peut démontrer par récurrence que $S_n = (n+1)^2$. Faisons-le :

INITIALISATION

Vérifions si la propriété est vraie au rang $n = 0$:

D'une part, nous avons : $S_0 = 1$ (d'après le définition).

D'autre part, nous avons : $(0 + 1)^2 = 1$

Donc on peut dire que $S_0 = (0 + 1)^2$

Alors la propriété que l'on veut démontrer est initialisée, c'est-à-dire vraie au rang $n = 0$.

HEREDITE

Supposons que la propriété soit vraie pour un certain entier naturel $n \geq 0$, c'est-à-dire :

$S_n = (n + 1)^2$

Démontrons qu'elle est également vraie au rang $n + 1$, c'est-à-dire :

$S_{n+1} = (n + 2)^2$

On a :

$S_{n+1} = 1 + 3 + \cdots + 2n + 1 + 2(n + 1) + 1 = 1 + 3 + \cdots + 2n + 1 + 2n + 3$

Dans l'expression de S_{n+1}, *on reconnait* $1 + 3 + \cdots + 2n + 1 = S_n$, *d'où*

$S_{n+1} = S_n + 2n + 3$

Or par hypothèse de récurrence, on suppose que $S_n = (n + 1)^2$, d'où en remplaçant :

$S_{n+1} = (n + 1)^2 + 2n + 3$ *(on développe)*

$S_{n+1} = n^2 + 2n + 1 + 2n + 3$

$S_{n+1} = n^2 + 4n + 4$ *(on reconnait une identité remarquable)*

$S_{n+1} = (n + 2)^2$ *on arrive bien à*

Donc la propriété est héréditaire.

CONCLUSION

La propriété $S_n = (n + 1)^2$ étant initialisée au rang $n = 0$ et héréditaire car $S_n = (n + 1)^2 \Rightarrow S_{n+1} = (n + 2)^2$ donc on peut dire que la propriété $S_n = (n + 1)^2$ est vraie pour tout entier naturel n.