Corrigé, récurrence, suite numérique

Mathématiques, démonstration par récurrence, terminale S

PLUSDEBONNESNOTES.COM

02 octobre 2017

Créé par : plusdebonnesnotes

Corrigé, récurrence, suite numérique

Mathématiques, démonstration par récurrence, terminale S

Énoncé

Exercice 1

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 2$, la fonction $f_n(x) = x^n$ définie sur $\mathbb{R}$ est **dérivable** et admet pour fonction dérivée : $\boldsymbol{f'_n(x) = nx^{n-1}}$.

Exercice 2

La suite (u_n) est définie par $u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2}$ et $u_0 = 0$.

Démontrer par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

Corrigé rédigé et détaillé

Exercice 1

Initialisation

Vérifions si la propriété est vraie au rang $n = 2$. Soit $x \in \mathbb{R}$, au rang $n = 2$, on a $f_2(x) = x^2$. D'où :

$f_2'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h}$

$f_2'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$

$f_2'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$ *(les x^2 s'annulent et on factorise par h)*

$f_2'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h}$ *(les h du numérateur et du dénominateur se simplifient)*

$f_2'(x) = \lim\limits_{h \to 0} 2x + h$ *(on peut remplacer h par 0 ici) d'où :*

$$f_2'(x) = 2x = 2x^1$$

Donc on peut affirmer que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, f_2 est dérivable et que $f_2'(x) = 2x$, donc la propriété est initialisée.

Hérédité

Supposons que la propriété est vraie à un certain rang $n > 2$. C'est-à-dire que f_n est dérivable et que $f_n'(x) = nx^{n-1}$. Démontrons alors qu'elle est également vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire que f_{n+1} est dérivable et que $f'_{n+1}(x) = (n+1) \times x^n$. On a :

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f_{n+1}(x) = x^{n+1} = x^n \times x$. Cette fonction est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables. En dérivant cette fonction qui est un produit de deux fonctions on a :

$f'_{n+1}(x) = nx^{n-1} \times x + 1 \times x^n$ *(ici on suppose que le résultat $(x)' = 1$ est connu)*

$f'_{n+1}(x) = nx^n + x^n$ *(on factorise par x^n)*

$f'_{n+1}(x) = (n+1)x^n$

Ainsi, nous pouvons dire que la propriété est héréditaire.

Conclusion

La propriété étant initialisée et héréditaire, on peut dire que pour tout entier naturel $n \geq 2$, et pour tout réel x on a :

La fonction $f_n(x) = x^n$ définie sur $\mathbb{R}$ est **dérivable** et admet pour fonction dérivée :

$$f'_n(x) = nx^{n-1}$$

Exercice 2

Soit la suite (u_n) est définie par $u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2}$ et $u_0 = 0$. En posant $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ avec x un nombre réel différent de -2, on a :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

Etudions alors la fonction f sur $\mathbb{R} - \{-2\}$. La fonction f est une fonction rationnelle donc dérivable sur son ensemble de définition :

$f'(x) = \frac{2(x+2)-1\times(2x+1)}{(x+2)^2}$ *(on développe et on réduit le numérateur)*

$f'(x) = \frac{2x+4-2x-1}{(x+2)^2}$

$f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$

On peut donc affirmer que la fonction f est croissante sur $]-\infty; -2[$ et sur $]-2; +\infty[$. Démontrons maintenant par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

Initialisation

Vérifions si la propriété est vraie au rang $n = 0$. On a $u_0 = 0$ donc :

$$0 \leq u_0 \leq 1$$

Ainsi la propriété est initialisée.

Hérédité

Supposons que la propriété soit vraie à un certain rang $n > 0$. C'est-à-dire : $0 \leq u_n \leq 1$. Démontrons qu'elle est également vraie au rang $n + 1$. C'est-à-dire : $0 \leq u_{n+1} \leq 1$:

D'après l'hypothèse de récurrence, on a :

$0 \leq u_n \leq 1$ *(on applique la fonction f strictement croissante sur $]-2; +\infty[$)*

$f(0) \leq f(u_n) \leq f(1)$ *(n'oublions pas que par définition, on a $u_{n+1} = f(u_n)$)*

$\frac{2\times 0+1}{0+2} \leq u_{n+1} \leq \frac{2\times 1+1}{1+2}$

$\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$ *(comme* $0 \leq \frac{1}{2}$ *on a)*

$$0 \leq u_{n+1} \leq 1$$

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion

La propriété étant initialisée et héréditaire on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$$