Corrigé, démonstration par récurrence

Démonstration par récurrence, démontrer une inégalité

PLUSDEBONNESNOTES.COM

17 septembre 2017

Créé par : plusdebonnesnotes

Corrigé, démonstration par récurrence

Démonstration par récurrence, démontrer une inégalité

ENONCE 1

Propriété à démontrer : Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $\begin{cases} U_{n+1} = \sqrt{\frac{1+U_n}{2}} \\ U_0 = 0 \end{cases}$

Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq U_n \leq 1$

SOLUTION DETAILLE ET REDIGEE

On se propose de démontrer la propriété par récurrence.

INITIALISATION

On vérifie si la propriété est vraie au rang $n = 1$:

On a : $U_1 = \sqrt{\frac{1+U_0}{2}} = \sqrt{\frac{1+0}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Donc : $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq U_1 \leq 1$

Donc, on peut dire que la propriété que nous voulons démontrer est initialisée.

HEREDITE

Supposons que la propriété que nous voulons démontrer soit vraie pour un certain entier naturel $n > 1$, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq U_n \leq 1$$

Démontrons alors que cette propriété est vraie au rang $n + 1$, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq U_{n+1} \leq 1$$

Or d'après l'hypothèse de récurrence on a :

$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq U_n \leq 1$ (on ajoute 1 à tous les membres de l'inégalité)

$\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \leq U_n + 1 \leq 2$ (on divise tous les membres de l'inégalité par 2)

$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}+1}{2} \leq \frac{U_n+1}{2} \leq 1$ (on applique la fonction racine carrée définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$)

$\sqrt{\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}+1}{2}} \leq \sqrt{\frac{U_n+1}{2}} \leq \sqrt{1}$ (on reconnaît dans le membre du milieu U_{n+1} et on obtient finalement)

Or $\sqrt{\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}+1}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} > \frac{1}{\sqrt{2}}$ (il suffit ici de calculer les valeurs approchés à la calculatrice pour se rendre compte de l'inégalité écrite, on obtient ainsi) :

$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}+1}{2}} \leq U_{n+1} \leq 1$

Ainsi avons bien démontrer ce qu'il fallait démontrer. Finalement, la propriété est héréditaire.

CONCLUSION

La propriété étant initialisée et héréditaire on peut conclure que :

$$\boldsymbol{\forall\, n \in \mathbb{N}, \frac{1}{\sqrt{2}} \leq U_n \leq 1}$$