Test du lundi N° 5

On considère les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$définies par :

$$u_0 \ = 2 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{2}{u_n} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$$

1. Calculerv_0, u_1 , v_1, u_2 et v_2.
   Donner les résultats sous forme de fraction irréductible.
2. En utilisant sa calculatrice, donner un tableau de valeurs décimales approchées de u_n et v_n pour n variant de 1 à 5.
3. Démontrer que les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont majorées par 2 et minorées par 1.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$
   $$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)} \qquad \text{(I)}$$
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq v_n$.
6. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et que la suit $(v_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$
   $$u_n - v_n \leq 1$$
   et en déduire que
   $$(u_n - v_n)^2 \leq u_n - v_n \text{ (II)}$$
8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$
   $$u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{4}\left(u_n - v_n\right) \text{(indication :on pourra utiliser (I) et (II))}$$
   En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$
   $$u_n - v_n \leq \frac{1}{4^n}$$
9. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont convergentes et qu'elles ont la même limite l.

   Une suite convergente de nombre rationnels a-t-elle pour limite un nombre rationnel ?