

EXERCICE 31

Asie juin 2013

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1 + 3u_n}{3 + u_n}$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

- 1) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n > 1$.
- 2) a) Établir que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{3 + u_n}$.

- b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .
En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1 + 0,5u_n}{0,5 + u_n}$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

- 1) On considère l'algorithme suivant :

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 9$. Les valeurs de u seront arrondies à 10^{-4} . Conjecturer alors le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

Variabes : n entier naturel
 u réel positif

Entrées et initialisation

| Lire n
| $2 \rightarrow u$

Traitement et sorties

| **pour** i variant de 1 à n **faire**

| | $\frac{1 + 0.5u}{0.5 + u} \rightarrow u$
| | Afficher u

| **fin**

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u									

- 2) On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$.
- a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.
- b) Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n .
- 3) a) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $v_n \neq 1$.
- b) montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$.
- c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .