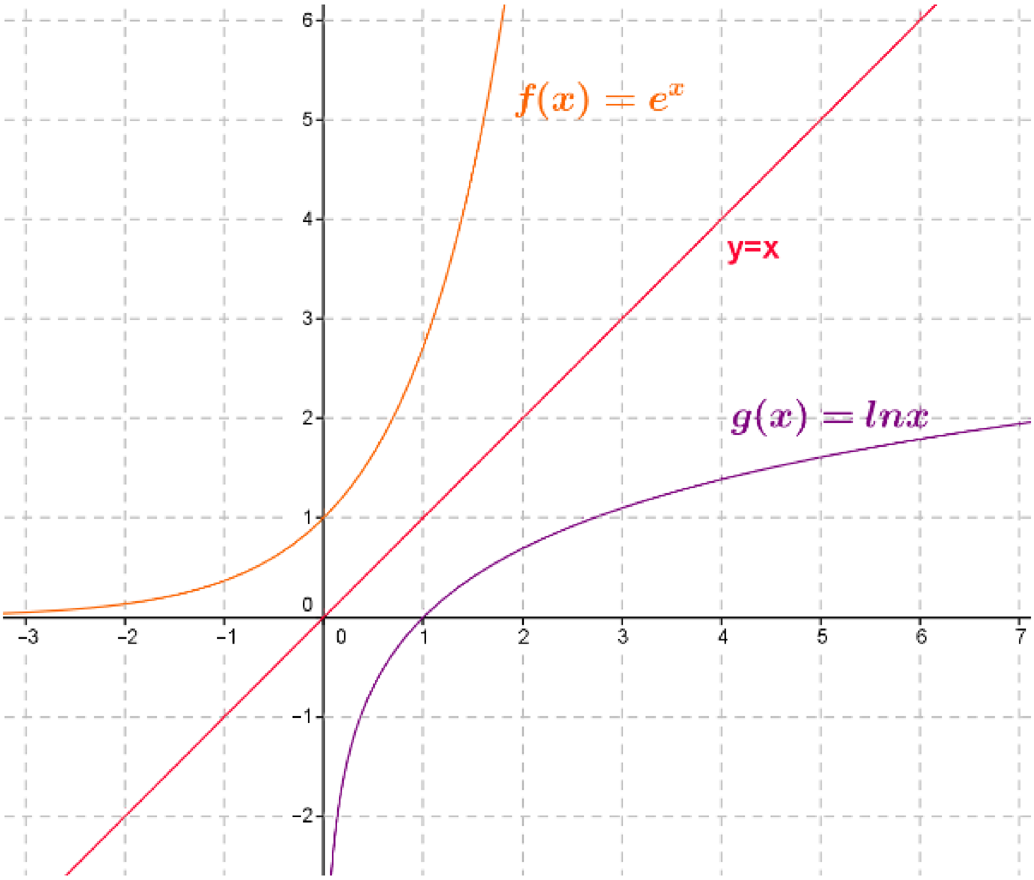
FONCTION LOGARITHME NEPERIEN



Chapitre 6 | Fonction logarithme népérien

Fonction logarithme népérien

I. PRESENTATION DE LA FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

1. Définition

La fonction logarithme népérien est une fonction définie sur $]0; +\infty[$ telle que :

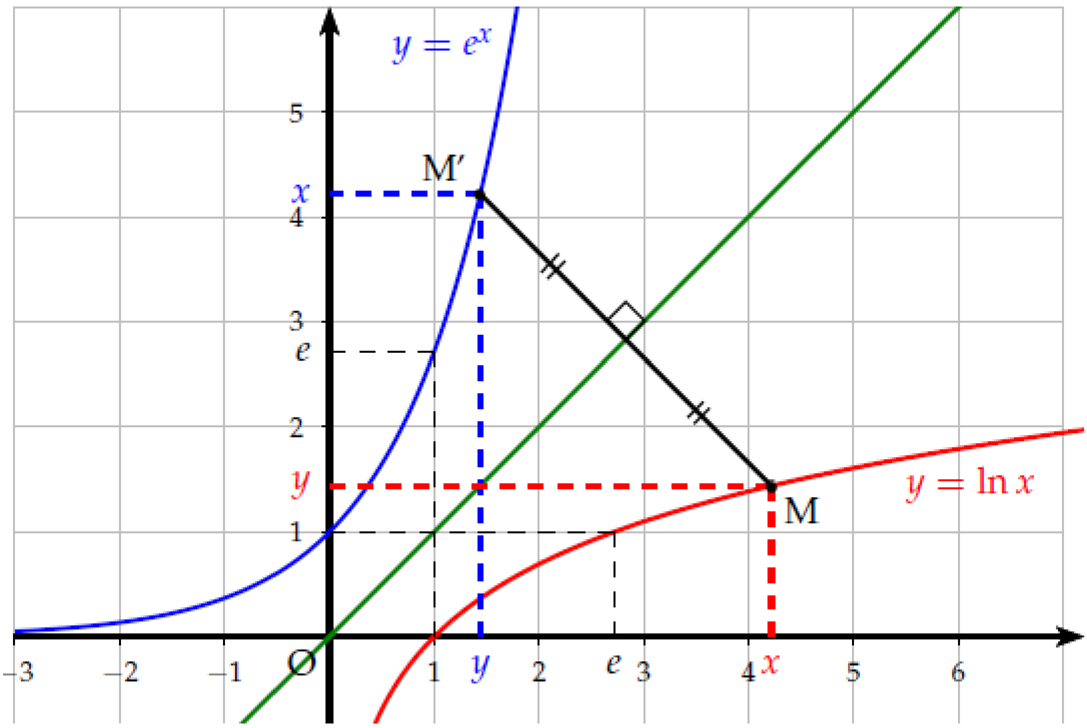
$$x = e^y \Leftrightarrow y = \ln(x)$$

La conséquence immédiate de cette définition est que les fonctions exponentielle et logarithme népérien sont réciproques.

S'en suit alors immédiatement :

2. Symétrie

La réciprocité des fonctions exponentielles et logarithme népérien ont pour conséquence directe une symétrie entre leur courbe représentative respective par rapport à la droite d'équation $y = x$:



3. Relation fondamentale de la fonction logarithme népérien

Théorème

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs. On a alors :

$$\mathbf{ln}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \mathbf{ln}(\boldsymbol{a}) + \mathbf{ln}(\boldsymbol{b})$$

Démonstration

4. Autres propriétés de la fonction logarithme népérien

Soient a et b deux réels strictement positifs

- $ln\frac{a}{b} = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$
- $\ln(a^n) = n \times \ln(a)$ où n est un entier naturel
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\sqrt{a}$

La démonstration de toutes ces propriétés sera faite en exercice d'entrainement.

II. ETUDE DE LA FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

1. Signe de la fonction logarithme népérien

Propriété

La fonction logarithme népérien notée ln est négative sur $]0;1]$ et positive sur $[1;+\infty[$

Démonstration

2. Variations de la fonction logarithme népérien

Théorème

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Démonstration

3. Fonction dérivée de la fonction logarithme népérien

Théorème

La fonction logarithme népérien est dérivable sur son ensemble de définition, c'est-à-dire $]0\,; +\infty[$ et sa dérivée est telle que :

$$ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Démonstration

4. Limites

On a les limites suivantes :

- $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to 0+} \ln(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = +\infty$ croissance comparée
- $\lim_{x \to 0+} xln(x) = 0$ croissance comparée.

5. Dérivée de $ln(u)$

Soit x un nombre réel. On pose $f(x) = \ln(u(x))$ où u est définie continue et dérivable. Alors on a :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Démonstration