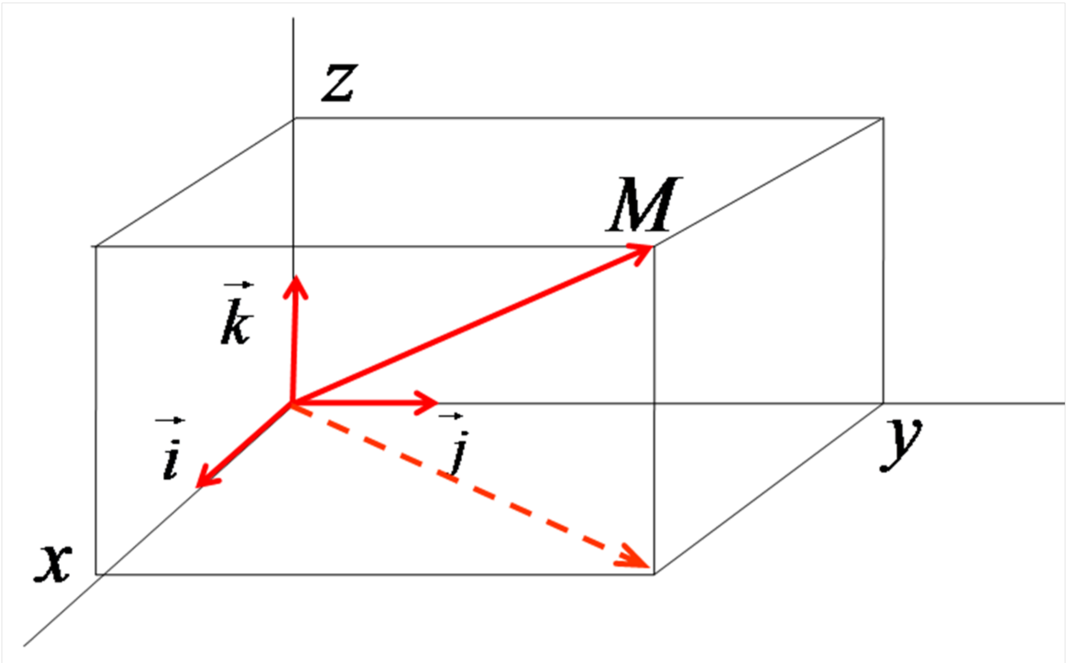
GEOMETRIE DANS L'ESPACE DEUXIEME PARTIE



Chapitre n+2

Géométrie dans l'espace deuxième partie

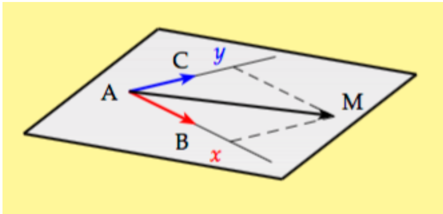
Nous allons aborder dans ce chapitre les aspects vectoriels de la géométrie dans l'espace.

I. VECTEURS ET PLANS

1. Vecteurs coplanaires

Définition vectorielle d'un plan

Un plan est engendré par deux vecteurs non colinéaires. En effet s'ils étaient colinéaires, ils n'engendreraient qu'une droite. Regardons bien :



Le plan (ABC) est engendré par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. D'ailleurs, pour tout point M du plan (ABC), nous avons :

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$$

Comme vous l'avez sans doute remarqué, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ forment une base du plan (ABC) qui est ainsi repéré par le repère : $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

Remarque

x et y sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$ dans le plan $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

Théorème

Soit $(\vec{u}_1; \vec{u}_2)$ une base d'un plan P. Soit $(\vec{v}_1; \vec{v}_2)$ une base d'un autre plan Q. Alors si $\vec{u}_1$ est colinéaire à $\vec{v}_1$ et si $\vec{u}_2$ est colinéaire à $\vec{v}_2$, alors les plans P et Q sont parallèles.

Définition

Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires si et seulement si** $\exists(x; y) \in \mathbb{R}^2$ $t.q$ $\quad \vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$

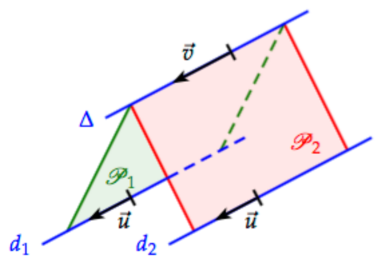
De même :

Quatre points A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si $\exists(x;y) \in \mathbb{R}^2$ $t.q$ $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$

2. Démonstration du théorème du toit ROC

Rappel du théorème

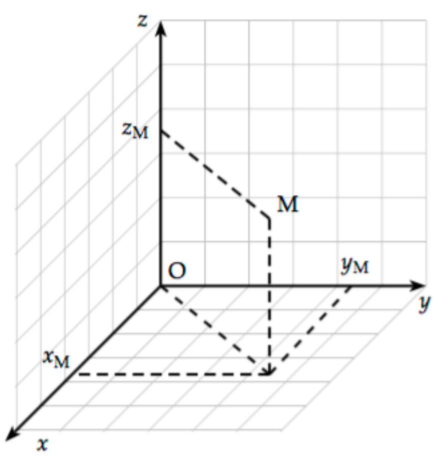
Théorème du toit : Si deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants. Et si d_1 et d_2 deux droites de ces plans sont parallèles alors d_1 et d_2 sont parallèles à l'intersection Δ des deux plans :



Supposons le contraire de ce qu'on veut montrer, c'est-à-dire que d_1 et d_2 ne sont pas parallèles à l'intersection Δ et ce, malgré le fait que les hypothèses du théorème du toit soient vraies.

II. REPERAGE DANS L'ESAPCE

1. Définition



Le repère de l'espace $(O, \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ est formé de l'origine O et de trois vecteurs $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ non coplanaires.

Tout point M de l'espace est donné par :

$\boldsymbol{\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}}$ **où** $\boldsymbol{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3}$

Remarque

x, y et z sont les coordonnées du point M.

2. Représentation paramétrique d'une droite

Propriété

Soit une droite (d) de vecteur directeur $\vec{u}(a;b;c)$. Soit $A(x_A;y_A;z_A)$ un point de cette droite. Alors on peut définir un système d'équations paramétriques pour caractériser la droite (d) :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = x_A + at} \\ \boldsymbol{y = y_A + bt} \\ \boldsymbol{z = z_A + ct} \end{cases} \qquad \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$$

3. Représentation paramétrique d'un plan

Propriété

Soient $\vec{u}(a;b;c)$ et $\vec{v}(m;p;q)$ deux vecteurs non colinéaires qui engendrent un plan P à partir d'un point $A(x_A;y_A;z_A)$. Alors on peut définir un système d'équations paramétriques pour caractériser le plan P :

$$\begin{cases} x = x_A + at + ms \\ y = y_A + bt + ps \\ z = z_A + ct + qs \end{cases}$$

III. EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1 ***(1 question)*** ***Niveau : facile***

On munit l'espace d'un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$. La droite (d) passe par le point $A(2\,;1\,;3)$ et admet $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur. Donner une représentation paramétrique de (d).

Exercice 2 ***(1 question)*** ***Niveau : facile***

On munit l'espace d'un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$. Donner une représentation paramétrique de la droite passant par les points $A(1\,;-2\,;3)$ et $B(3\,;2\,;-1)$.

Exercice 3 *(1 question)* — *Niveau : facile*

On munit l'espace d'un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$. Donner une représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point $A(0\,;-1\,;2)$ et parallèle à la droite passant par les points $B(-1\,;2\,;3)$ et $C(1\,;1\,;4)$.

Exercice 5 *(7 questions)* — *Niveau : facile*

On munit l'espace d'un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$.

Soit la droite (d) dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 - t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

1) Donner les coordonnées de trois points appartenant à (d).
2) Préciser les coordonnées du point de (d) ayant 2 pour abscisse.
3) Préciser les coordonnées du point de (d) ayant -4 pour ordonnée.
4) Préciser les coordonnées du point de (d) ayant 6 pour cote.
5) Le point de coordonnées $(-5\,;9\,;4)$ appartient-il à (d) ?
6) Donner un vecteur directeur de (d).
7) Donner le vecteur directeur de (d) de cote 7.

Exercice 7 *(2 questions)* — *Niveau : facile*

On munit l'espace d'un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$. Soient les droites (d) et (d') de représentations paramétriques respectives $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ et $\begin{cases} x = -1 + 3t' \\ y = -2 + t' \\ z = t' \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

1) Démontrer que les droites (d) et (d') sont sécantes.
2) Préciser les coordonnées de leur point d'intersection.

Exercice 9 *(3 questions)* — *Niveau : facile*

On munit l'espace d'un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$. Déterminer l'intersection de la droite (d) dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ et passant par $A(1\,;2\,;3)$:

1) avec le plan (xOy)
2) avec le plan (xOz)
3) avec le plan (yOz)

iges.com