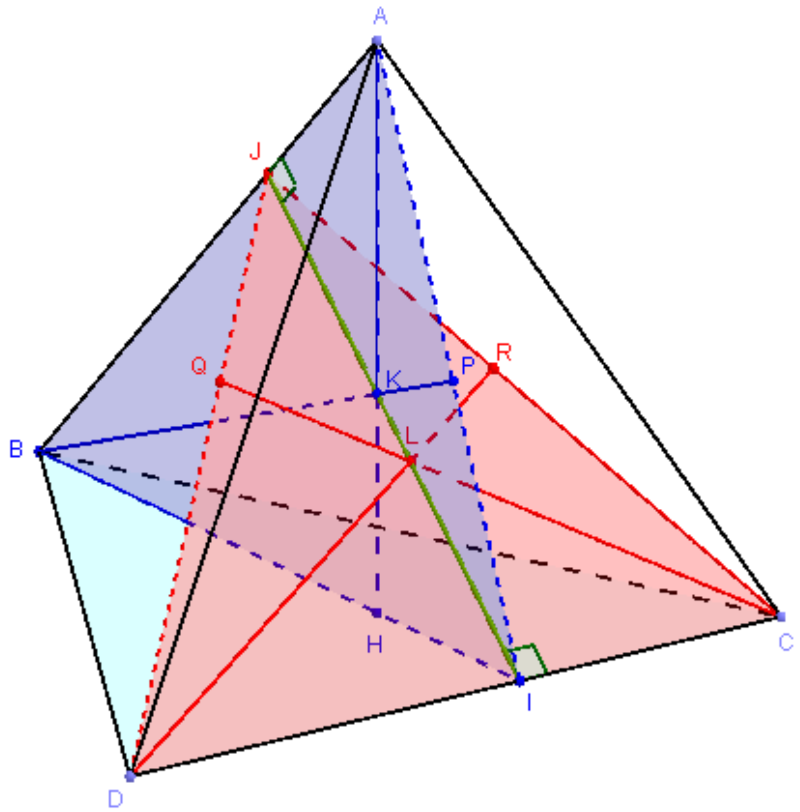
GEOMETRIE DANS L'ESPACE PARTIE 3



Chapitre n+3

Géométrie dans l'espace partie 3

Ce cours aborde le produit scalaire dans l'espace et tout ce qu'il induit.

I. PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

1. Définition

Le produit scalaire est une opération qui transforme deux vecteurs $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ en un seul et unique réel noté $\vec{u}.\vec{v}$; On a les trois définitions suivantes :

- $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$
- $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$
- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u}; \vec{v})$

2. Propriétés du produit scalaire

- Le produit scalaire est commutatif : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- Le produit scalaire est distributif : $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

Propriété fondamentale

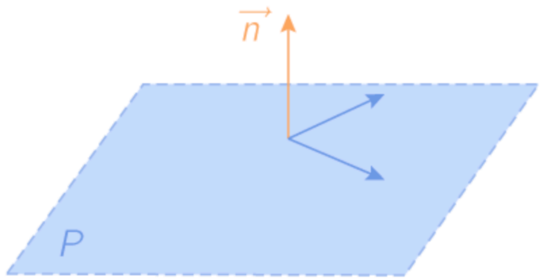
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$

II. EQUATION CARTESIENNE D'UN PLAN

1. Vecteur normal

Définition

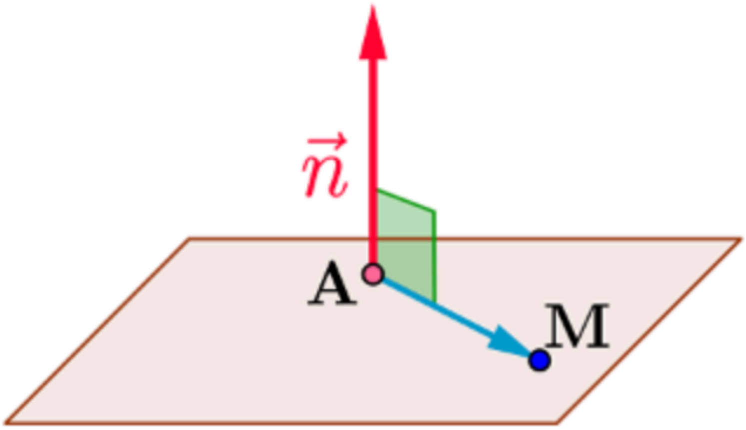
On dit qu'un vecteur $\vec{n}$ est normal à un plan P si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan :



2. Définition d'un plan avec le vecteur normal

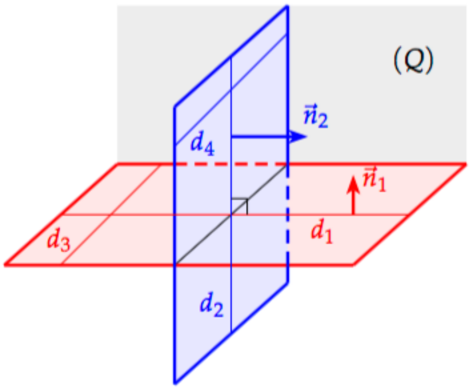
Soit un plan P passant par un point A de vecteur normal $\vec{n}$. Alors ce plan P est l'ensemble des points M tels que

$$\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$$



3. Définition de deux plans perpendiculaires

Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont perpendiculaires.



4. Equation cartésienne d'un plan

Théorème

L'équation cartésienne d'un plan est de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

Démonstration ROC

III. EXERCICES DE BAC

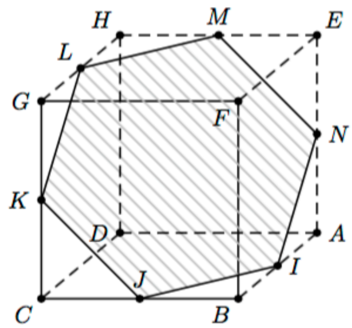
Antilles Guyane 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête égale à 1.
L'espace est muni du repère orthonormé $(D\,;\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DH})$.

Dans ce repère, on a :
$D(0\,;\,0\,;\,0)$, $C(1\,;\,0\,;\,0)$, $A(0\,;\,1\,;\,0)$,
$H(0\,;\,0\,;\,1)$ et $E(0\,;\,1\,;\,1)$.

Soit I le milieu de $[AB]$.



Soit $\mathscr{P}$ le plan parallèle au plan (BGE) et passant par le point I.

On admet que la section du cube par le plan $\mathscr{P}$ représentée ci-dessus est un hexagone dont les sommets I, J, K, L, M, et N appartiennent respectivement aux arêtes $[AB]$, $[BC]$, $[CG]$, $[GH]$, $[HE]$ et $[AE]$.

1) a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (BGE).

b) En déduire une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.

2) Montrer que le point N est le milieu du segment $[AE]$.

3) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HB).

b) En déduire que la droite (HB) et le plan $\mathscr{P}$ son sécants en un point T dont on précisera les coordonnées.

4) Calculer, en unités de volume, le volume du tétraèdre $FBGE$.

France métropolitaine 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (4 points) (commun à tous les candidats)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on donne les points :

$$A(1\,;\,2\,;\,3),\ B(3\,;\,0\,;\,1),\ C(-1\,;\,0\,;\,1),\ D(2\,;\,1\,;\,-1),\ E(-1\,;\,-2\,;\,3) \text{ et } F(-2\,;\,-3\,,\,4).$$

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 : Les trois points A, B, et C sont alignés.

Affirmation 2 : Le vecteur $\vec{n}(0\,;\,1\,;\,-1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Affirmation 3 : La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants et leur point d'intersection est le milieu du segment $[BC]$.

Affirmation 4 : Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.