Correction de l'exercice 12 (type bac)

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}$, Calculons $A \times U_n$:

$$A \times U_n = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,125 j_n + 0,525 a_n \\ 0,625 j_n + 0,625 a_n \end{pmatrix} = U_{n+1}$$

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{U_{n+1} = A \times U_n}$.

b) Au bout d'un an d'observation la population d'animaux sera caractérisé par la matrice U_1

$$U_1 = A \times U_0 = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \end{pmatrix}$$

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0,125 \times 200 + 0,525 \times 500 \\ 0,625 \times 200 + 0,625 \times 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 287,5 \\ 437,5 \end{pmatrix}$$

Arrondi à l'unité *par défaut, au bout d'un an, il y aura 287 jeunes et 437 adultes.

De même :

$$U_2 = A \times U_1 = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 287,5 \\ 437,5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,125 \times 287,5 + 0,525 \times 437,5 \\ 0,625 \times 287,5 + 0,625 \times 437,5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 265,625 \\ 453,125 \end{pmatrix}$$

Au bout de deux ans, il y aura donc 265 jeunes et 453 adultes.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$, on conjecture que $U_n = A^n \times U_0$.

Montrons cette conjecture par récurrence :

Initialisation : $U_0 = A^0 \times U_0$

$$U_0 = Id_2 \times \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \end{pmatrix}$$

D'autre part $U_0 = \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \end{pmatrix}$ d'après l'énoncé. Donc finalement, la propriété est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n = A^n \times U_0$ et montrons que $U_{n+1} = A^{n+1} \times U_0$. Par hypothèse de récurrence, on a :

$U_n = A^n \times U_0$. Or on sait que :

$U_{n+1} = A \times U_n$. En substituant :

$U_{n+1} = A \times A^n \times U_0 = A^{n+1} \times U_0$.

Donc la propriété est héréditaire.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n \times U_0$.

2) a) Calculons dans un premier temps $Q \times D$:

$$Q \times D = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -0,25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 \times (-0,25) + 0 \times 3 & 7 \times 0 + 3 \times 1 \\ -5 \times (-0,25) + 5 \times 0 & -5 \times 0 + 5 \times 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1,75 & 3 \\ 1,25 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculons maintenant $(Q \times D) \times Q^{-1}$:

$$(QD)Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1,75 & 3 \\ 1,25 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,1 & -0,06 \\ 0,1 & 0,14 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1,75 \times 0,1 + 3 \times 0,1 & -1,75 \times (-0,06) + 3 \times 0,14 \\ 1,25 \times 0,1 + 5 \times 0,1 & 1,25 \times (-0,06) + 5 \times 0,14 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix} = A$$

2) b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ montrons par récurrence que

$$A^n = QD^nQ^{-1}.$$

Initialisation : On a $A^1 = QD^1Q^{-1}$ d'après la question précédente. Donc la propriété est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $A^n = QD^nQ^{-1}$ et montrons que $A^{n+1} = QD^{n+1}Q^{-1}$.

Par hypothèse de récurrence on a :

$A^n = QD^nQ^{-1}$ On multiplie par A

$A^{n+1} = AQD^nQ^{-1}$

$A^{n+1} = QDQ^{-1}QD^nQ^{-1}$

$A^{n+1} = QDD^nQ^{-1}$

$A^{n+1} = QD^{n+1}Q^{-1}$.

Donc la propriété est héréditaire.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = QD^nQ^{-1}$.

c) On sait que D est une matrice diagonale car $D = \begin{pmatrix} -0,25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

donc $D^n = \begin{pmatrix} (-0,25)^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix}$.

La puissance $n^{ème}$ d'une matrice diagonale est tout simplement égale à ses coefficients diagonaux à la puissance n.

3) a) $\forall n \in \mathbb{N}$, on sait que :

$$U_n = A^n \times U_0$$

Or $A^n = QD^nQ^{-1}$, d'où

$$QD^n = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-0{,}25)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 \times (-0{,}25)^n & 3 \\ -5 \times (-0{,}25)^n & 5 \end{pmatrix}$$

Puis, $(QD^n) \times Q^{-1}$:

$$(QD^n) \times Q^{-1} = \begin{pmatrix} 7 \times (-0{,}25)^n & 3 \\ -5 \times (-0{,}25)^n & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}06 \\ 0{,}1 & 0{,}14 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 0{,}7 \times (-0{,}25)^n + 0{,}3 & -0{,}42(-0{,}25)^n + 0{,}42 \\ -0{,}5 \times (-0{,}25)^n + 0{,}5 & 0{,}3 \times (-0{,}25)^n + 0{,}7 \end{pmatrix}$$

Finalement

$U_n = A^n \times U_0$ d'où :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0{,}7 \times (-0{,}25)^n + 0{,}3 & -0{,}42(-0{,}25)^n + 0{,}42 \\ -0{,}5 \times (-0{,}25)^n + 0{,}5 & 0{,}3 \times (0{,}25)^n + 0{,}7 \end{pmatrix}}_{A^n} \underbrace{\begin{pmatrix} 200 \\ 500 \end{pmatrix}}_{U_0}$$

$$= \begin{pmatrix} 60 + 140 \times (-0{,}25)^n - 210 \times (-0{,}25)^n + 210 \\ 100 - 100 \times (-0{,}25)^n + 350 + 150 \times (-0{,}25)^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 270 - 70 \times (-0{,}25)^n \\ 450 + 50(-0{,}25)^n \end{pmatrix}$$

Finalement :

$$\begin{cases} j_n = 270 - 70 \times (-0{,}25)^n \\ a_n = 450 + 50 \times (-0{,}25)^n . \end{cases}$$

b) Comme $-0{,}25 \in]-1;1[$

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} j_n = 270 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 450 \end{cases}$$