Exercice 3 : fonct° ln, étude de fonct°

1) a) Soit $x \in ]0;+\infty[$, on pose :

$$f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x^2}.$$

On a :

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = \underline{-\infty}$ d'où $\lim\limits_{x \to 0^+} 1+\ln(x) = \underline{-\infty}$.

et on a :

$\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = \underline{0}$. Par quotient des limites,

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \underline{-\infty}.$

b) D'après le cours, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$

On a : $f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x^2}$. On factorise par $x$ :

$$f(x) = \frac{\cancel{x}\left(\frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}\right)}{\cancel{x} \times x}$$

$$f(x) = \frac{\frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}}{x}$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$.

et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$.

Par quotient des limites,

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0.$

c) $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale d'éq° $y = 0$ en $+\infty$ et une asymptote verticale d'éq° $x = 0$ en $0$, d'après la question précédente.

2) a) Par quotient, $f$ est dérivable sur son ensemble de définition :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x(1+\ln(x))}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{x - 2x - 2x\ln(x)}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{-x - 2x\ln(x)}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{\cancel{x}(-1-2\ln(x))}{\cancel{x} \times x^3}$$

$$f'(x) = \frac{-1-2\ln(x)}{x^3}.$$

2) b) Soit $x \in ]0;+\infty[$, résolvons l'inéquation suivante :

$$-1-2\ln(x) > 0.$$

$$\iff -1 > 2\ln(x).$$

$$\iff -\frac{1}{2} > \ln(x).$$

$$e^{-1/2} > x.$$

on applique la f exp st croissante sur $\mathbb{R}$.

De m̂, $-1-2\ln(x) < 0$

$$\iff x > e^{-1/2}.$$

On sait que $\forall x \in ]0;+\infty[$, $x^3 > 0$.
On en déduit que le signe de $f'(x)$ ne dépend que de $-1-2\ln(x)$. D'où :

* $\forall x \in ]0; e^{-1/2}]$, $f'(x) \geq 0$.

* $\forall x \in [e^{-1/2};+\infty[$, $f'(x) \leq 0$.

3) Dressons le tableau de variation de la fonction $f$ avec l'ensemble des données précédentes :

| $x$ | $0$ | $e^{-1/2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $f(e^{-1/2}) = \frac{1}{2}e$ | ↘ $0$ |

$$f(e^{-1/2}) = \frac{1+\ln e^{-1/2}}{(e^{-1/2})^2}$$

$$f(e^{-1/2}) = \frac{1-\frac{1}{2}}{e^{-1}} = \frac{1}{2}e.$$