

Exercice 3: fonct° ln, étude de fonct°

1) a) Soit  $x \in ]0; +\infty[$ , on pose:

$$f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2}$$

On a:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + \ln(x) = -\infty$$

et on a:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0 \text{, Par quotient des limites,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

b) D'après le cours,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ .

On a:  $f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2}$ . On factorise par  $x$ :

$$f(x) = \frac{x \left( \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x} \right)}{x \times x}$$

$$f(x) = \frac{\frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}}{x}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

Par quotient des limites,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

1)  $\mathcal{C}$  admet une asymptote horizontale d'éq°  $y = 0$  en  $+\infty$  et une asymptote verticale d'éq°  $x = 0$  en 0, d'après la question précédente.

2) a) Par quotient,  $f$  est dérivable sur son ensemble de définition:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} x^2 - 2x(1 + \ln(x))}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{x - 2x - 2x \ln(x)}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{-x - 2x \ln(x)}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{x(-1 - 2 \ln(x))}{x \times x^3}$$

$$f'(x) = \frac{-1 - 2 \ln(x)}{x^3}$$

2) b) Soit  $x \in ]0; +\infty[$ , résolvons l'inéquation suivante:

$$-1 - 2 \ln(x) > 0.$$

$$\Leftrightarrow -1 > 2 \ln(x).$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} > \ln(x).$$

$$\underline{e^{-1/2} > x}.$$

Je m'applique  
la f<sup>o</sup> exp  
st croissante  
sur  $\mathbb{R}$ .

De m<sup>^</sup>,  $-1 - 2 \ln(x) < 0$

$$\Leftrightarrow \underline{x > e^{-1/2}}.$$

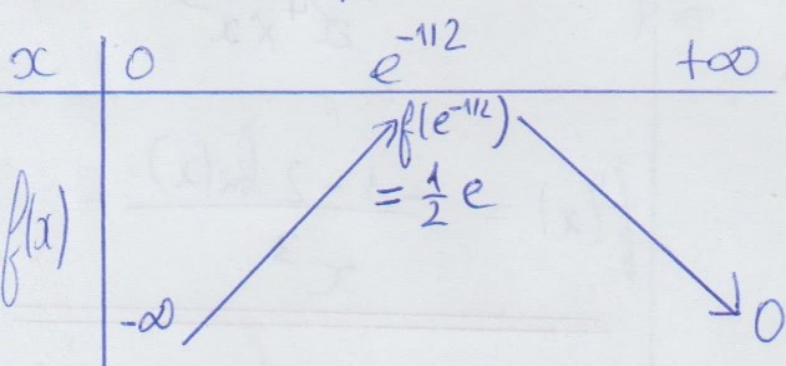
On sait que  $\forall x \in ]0; +\infty[, x^3 > 0$ .

On en déduit que le signe de  $f'(x)$  ne dépend que de  $-1 - 2 \ln(x)$ . D'où:

$$* \forall x \in ]0; e^{-1/2}], \underline{f'(x) \geq 0}.$$

$$* \forall x \in [e^{-1/2}; +\infty[, \underline{f'(x) \leq 0}.$$

3) Dressons le tableau de variation de la fonction  $f$  avec l'ensemble des données précédentes:



$$f(e^{-1/2}) = \frac{1 + \ln e^{-1/2}}{(e^{-1/2})^2}$$

$$f(e^{-1/2}) = \frac{1 - \frac{1}{2}}{e^{-1}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}e}}.$$