Corrigé du contrôle sur ln :

Partie A :

L'équation (E) : $e^x = 3(x^2+x^3)$ admet des solutions les courbes représentatives de la fonct° exponentielle et celle de f admettent des points d'intersection. Il semblerait d'après le graphique qu'il n'y ait qu'une seule intersection pour $x \in [0;1]$.

Finalement (E) admet une solution sur $\mathbb{R}$ notée α t.q :

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

Partie B :

1) a) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$x^2+x^3 = x^2(1+x).$$

on en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x^2		+		+	0	+	
$1+x$		−	0	+		+	
x^2+x^3		−	0	+	0	+	

On obtient finalement,

$\forall x \in]-\infty;-1]$, $x^2+x^3 \leq 0$.

$\forall x \in [-1;+\infty[$, $x^2+x^3 \geq 0$.

b) $\forall x \in]-\infty;-1]$, $x^2+x^3 \leq 0$

Or $\forall x \in]-\infty;-1]$ $e^x > 0$

Finalement, sur $]-\infty;-1]$,

$$e^x \neq x^2+x^3.$$

l'éq° E n'admet donc pas de sol° sur $]-\infty;-1]$.

c) D'une part, $e^0 = 1$

D'autre part, $3(0^2+0^3) = 0$.

Or $1 \neq 0$

Donc (E) n'admet pas 0 pour solution.

2) On a (E) :

sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$

$$e^x = 3(x^2+x^3)$$

on applique la fonction ln définie sur $]0;+\infty[$.

Remarquons que d'après 1)a), sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$, e^x et $3(x^2+x^3)$ est bien strictement positif. d'où :

$$\ln(e^x) = \ln(3(x^2+x^3))$$

$$x = \ln(3 \times x^2 \times (x+1))$$

$$x = \ln(3) + \ln(x^2) + \ln(x+1)$$

$$0 = \ln(3) + \ln(x^2) + \ln(x+1) - x.$$

$$\Leftrightarrow h(x) = 0.$$

3) a) Soit $x \in]-1;0[\cup]0;+\infty[= I$, h est dérivable sur I par somme de fonctions dérivables, d'où :

$$h'(x) = \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{1+x} - 1$$

$$h'(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1}$$

$$h'(x) = \frac{2(1+x) + x - x(1+x)}{x(1+x)}$$

$$h'(x) = \frac{2+2x+x-x-x^2}{x(1+x)}$$

$$\boxed{h'(x) = \frac{-x^2+2x+2}{x(1+x)}}$$

b) Pour déterminer les variations de h, étudions le signe de $h'(x)$:

On calcule le discriminant de $-x^2+2x+2$:

$\Delta = 2^2 - 4\times(-1)\times 2 = 12 > 0$

d'où $x_1 = \frac{-2-\sqrt{12}}{-2}$

$x_1 = \frac{-2-2\sqrt{3}}{-2}$

$x_1 = 1+\sqrt{3}$.

ou $x_2 = \frac{-2+\sqrt{12}}{-2}$

$x_2 = 1-\sqrt{3}$.

On en déduit le tableau de signe de $h'(x)$ et le tableau de variation de h :

x	-1		$1-\sqrt{3}$		0		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$1+x$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$-x^2+2x+2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$h'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$		$-$	
$h(x)$	‖	↗	$-0,1$	↘	‖	↗	$1,7$	↘	

On ne donne pas les limites car on ne demande que les variat°.

c) L'équation $h(x)=0$ n'admet pas de solution sur $]-1;0[$ car le maximum de h sur $]-1;0[$ est strictement négatif.

Sur $[0;+\infty[$, on a

$h(0,5) = -0,3$

$h(1+\sqrt{3}) = 1,7$

h strictement croissante et continue donc d'après le corollaire du TVI, l'éq°

$h(x)=0$ admet une unique solution sur $[0,5 ; 1+\sqrt{3}]$.

De même on a :

$h(1+\sqrt{3}) = 1,7 > 0$

$h(20) = -9,8 < 0$.

h est continue et st décroissante

Donc d'après le corollaire du TVI l'éq° $h(x)=0$ admet une unique sol° sur $[1+\sqrt{3} ; +\infty[$.

Il y a donc deux sol° sur $\mathbb{R}$

$$\alpha_1 = 0,62 \text{ et } \alpha_2 = 7,12$$

(D'après la calculatrice).

d) $h(x)=0$ est équivalente à (E). On nous avions conjecturer que cette éq° avait une seule solution, en réalité il y en a 2. La conjecture étoit donc fausse !