Correction du 72

1) On sait que d'après le tableau :

$$\begin{cases} f(-\frac{1}{2}) = 0 \\ f'(0) = 0 \\ f(\frac{1}{4}) = \ln(\frac{5}{8}) \end{cases} \iff \begin{cases} \ln(\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + c) = \ln(1) \\ \frac{2a\times 0 + b}{a\times 0^2 + b\times 0 + c} = 0 \\ \frac{1}{16}a + \frac{1}{4}b + c = \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}a + c = 1 \\ b = 0 \\ \frac{1}{16}a + c = \frac{5}{8} \end{cases} \qquad \begin{cases} \cancel{\frac{1}{4}a}\ c = 1 - \frac{1}{4}a \\ b = 0 \\ \frac{1}{16}a + 1 - \frac{1}{4}a = \frac{5}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 1 - \frac{1}{4}a \\ b = 0 \\ -\frac{3}{16}a = -\frac{3}{8} \end{cases} \qquad \begin{cases} c = \frac{1}{2} \\ b = 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

Finalement, on obtient $f(x) = \ln(2x^2 + \frac{1}{2})$.

2) a) La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition :

$$f'(x) = \frac{4x}{2x^2 + \frac{1}{2}}.$$

2) b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $2x^2 + \frac{1}{2}$ est toujours strictement positif donc le signe de $f'(x)$ ne dépend que de $4x$:

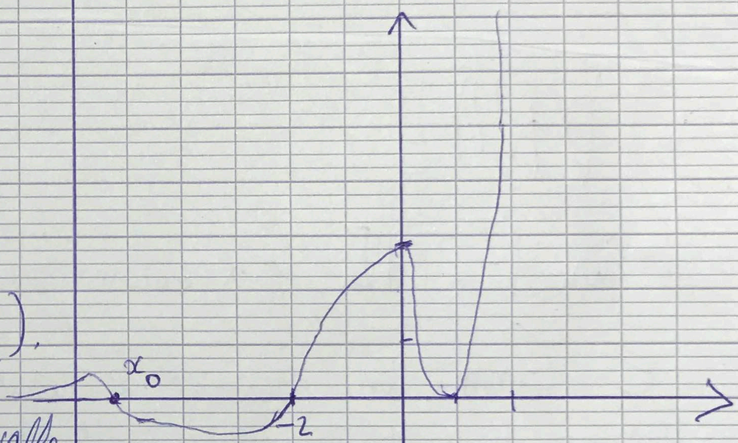
Or si $x < 0$, $4x < 0$, f est décroissante.
Si $x > 0$, $4x > 0$, f est croissante.
Les variat° observées dans le tableau coïncident.

c) On calcule $f(0)$:

$$f(0) = \ln(2\times 0^2 + \frac{1}{2}) = \ln(\frac{1}{2}).$$

Correction du 74 :

1) Faux : voici un contre exemple :



Ici, il existe $x_0 \in]-\infty ; 2[$ t.q $\forall x < x_0$, $f(x) > 0$ et $\mathcal{C}_f$ a toujours pour asymptote $y = 0$.

Dès lors g serait définie sur $]-\infty ; x_0[\cup]-2 ; 2[$.

De même $f(1) = 0$ donc g non définie en 1.

2) FAUX

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

D'où $g'(0) = \frac{f'(0)}{f(0)}$

$$g'(0) = \frac{0}{e} = 0$$

3) VRAI

Sur $]-2;1[$, f a pour maximum e. Comme ln préserve les variat°

le maximum de g est aussi atteint en 0 et vaut $g(e)=1$.

Donc l'éq° $g(x)=1$ admet une unique solution sur $]-2;1[$. g étant continue et strictement croissante

$\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} g(x) = -\infty$. Donc l'éq° $g(x) = 1$ admet une unique solution x_0 sur $]1;2[$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x<2}} g(x) = +\infty$ Ce qui fait bien 2 au total.

4) VRAI.

$g(g(x)) = g(\ln(f(x)))$

$= \ln(f(\ln(f(x))))$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = e$

$\lim\limits_{x\to 1} \ln(x) = 1$.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$.

$\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$

Par composition

$\lim\limits_{x\to 0} g(g(x)) = -\infty$