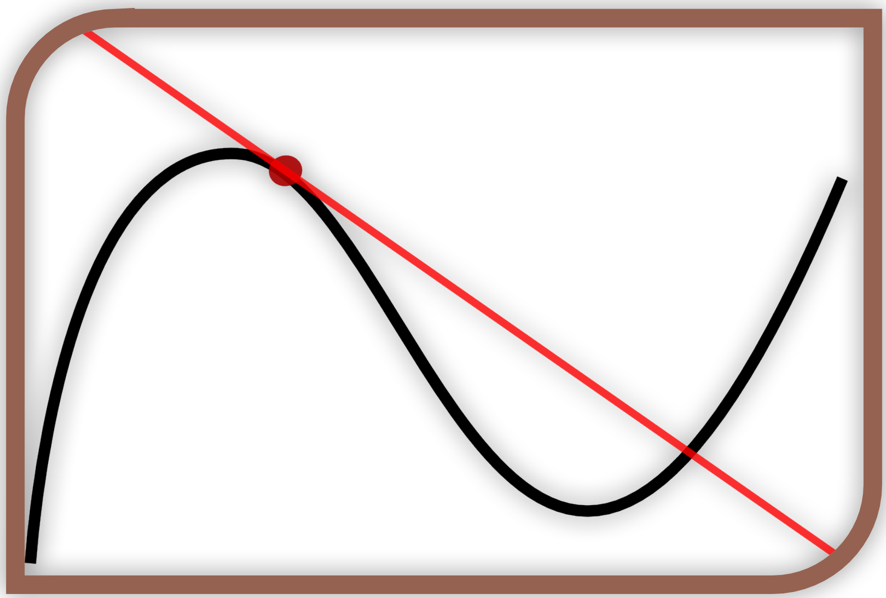
Corrigé : « Une histoire de tangente"



Plus De Bonnes Notes
www.plusdebonnesnotes.com

Question 1

Soit $x \in]0; +\infty]$, on a $f(x) = \sqrt{3x}$. Le mobile quitte la trajectoire C_f au point A suivant la tangente à la courbe au point A d'abscisse 4. Calculons alors l'équation de cette tangente selon la formule du cours :

$$y = f'(4) \times (x-4) + f(4)$$

Pour y arriver calculons dans un premier temps, $f'(4)$ suivant la formule du cours :

$$f'(4) = \lim_{h\to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$$
$$f'(4) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{3(4+h)} - \sqrt{4\times 3}}{h}$$
$$f'(4) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{12+3h} - \sqrt{12}}{h}$$

On multiplie en haut et en bas par $\sqrt{12+3h} + \sqrt{12}$:

$$f'(4) = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{12+3h} - \sqrt{12}\right)\times\left(\sqrt{12+3h} + \sqrt{12}\right)}{h\times\left(\sqrt{12+3h} + \sqrt{12}\right)}$$

On reconnaît au numérateur une identité remarquable :

$$f'(4) = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{12+3h}^2 - \sqrt{12}^2\right)}{h\times\left(\sqrt{12+3h} + \sqrt{12}\right)}$$
$$f'(4) = \lim_{h\to 0} \frac{12+3h-12}{h\times\left(\sqrt{12+3h} + \sqrt{12}\right)}$$
$$f'(4) = \lim_{h\to 0} \frac{3h}{h\times\left(\sqrt{12+3h} + \sqrt{12}\right)}$$

On simplifie par h au numérateur et au dénominateur et on obtient :

$$f'(4) = \lim_{h\to 0} \frac{3}{\left(\sqrt{12+3h} + \sqrt{12}\right)}$$

Lorsque h se situe au voisinage de 0, on obtient :

$$\boxed{f'(4) = \lim_{h\to 0} \frac{3}{\left(\sqrt{12+3h} + \sqrt{12}\right)} = \frac{3}{2\sqrt{12}} = \frac{3\times\sqrt{12}}{2\times\sqrt{12}\times\sqrt{12}} = \frac{3\sqrt{12}}{24} = \frac{\sqrt{12}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{4}}$$

Désormais, calculons $f(4)$:

$$f(4) = \sqrt{3\times 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

On a maintenant tous les éléments pour calculer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 4 :

$$y = f'(4)\times(x-4) + f(4)$$
$$y = \frac{\sqrt{3}}{4}\times(x-4) + 2\sqrt{3}$$
$$y = \frac{\sqrt{3}}{4}x - \sqrt{3} + 2\sqrt{3}$$
$$y = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \sqrt{3}$$

Déterminons maintenant l'abscisse du point B en résolvant l'équation suivante :

$$\frac{\sqrt{3}}{4}x + \sqrt{3} = 6$$
$$\frac{\sqrt{3}}{4}x = 6 - \sqrt{3}$$
$$x = \frac{6-\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \left(6-\sqrt{3}\right)\times\frac{4}{\sqrt{3}}$$
$$x = \frac{24-4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{24\sqrt{3}-4\times 3}{3}$$

$$\boxed{x = 8\sqrt{3} - 4}$$

Question 2

En refaisant le même travail que dans la question précédente mais en remplaçant le 4 par a on a le résultat suivant :

$$f'(a) = \frac{3}{2\sqrt{3a}}$$

On a par ailleurs :

$$f(a) = \sqrt{3a}$$

L'équation générale de la tangente au point d'abscisse a s'écrit donc :

$$y = \frac{3}{2\sqrt{3a}}\times(x-a) + \sqrt{3a}$$

D'après l'énoncé, on sait que cette tangente doit passer par le point $B(5;6)$, alors les coordonnées de B doivent satisfaire l'équation générale de la tangente :

$$6=\frac{3}{2\sqrt{3a}}\times(5-a)+\sqrt{3a}$$
$$\frac{15-3a}{2\sqrt{3a}}+\sqrt{3a}=6$$
$$\frac{15-3a+2\times3a}{2\sqrt{3a}}=6$$
$$\frac{15+3a}{2\sqrt{3a}}-6=0$$
$$\frac{15+3a-12\sqrt{3a}}{2\sqrt{3a}}=0$$

On pose $A=\sqrt{3a}$ et on obtient :

$$\frac{15+A^2-12A}{2\sqrt{3a}}=0$$
$$A^2-12A+15=0$$

Calculons alors le discriminant du polynôme précédent :

$$\Delta=(-12)^2-4\times1\times15=84>0$$

Il y a donc deux racines distinctes :

$$A_1=\frac{12-\sqrt{84}}{2}=6-\sqrt{21}$$

Ou bien :

$$A_2=\frac{12+\sqrt{84}}{2}=6+\sqrt{21}$$

Il faut maintenant trouver les valeurs de a correspondantes :

$$\sqrt{3a}=6-\sqrt{21}$$
$$3a=\left(6-\sqrt{21}\right)^2$$

$$\boxed{a_1=\frac{\left(6-\sqrt{21}\right)^2}{3}=\frac{36-12\sqrt{21}+21}{3}=19-4\sqrt{21}\approx0{,}67}$$

Ou bien :

$$\sqrt{3a}=6+\sqrt{21}$$
$$3a=\left(6+\sqrt{21}\right)^2$$

$$a_2 = \frac{\left(6+\sqrt{21}\right)^2}{3} = \frac{36+12\sqrt{21}+21}{3} = 19+4\sqrt{21} \approx 37{,}33$$

Ici il faut remarquer que nous ne pouvons pas retenir la deuxième a_2 car la trajectoire va de gauche à droite.

Finalement, nous pouvons répondre que le mobile rencontre le point C lorsqu'il quitte la trajectoire curviligne au point d'abscisse $a = 19 - 4\sqrt{21}$.

Vérification des résultats (car ils peuvent sembler au premier abord sortis d'ailleurs) :

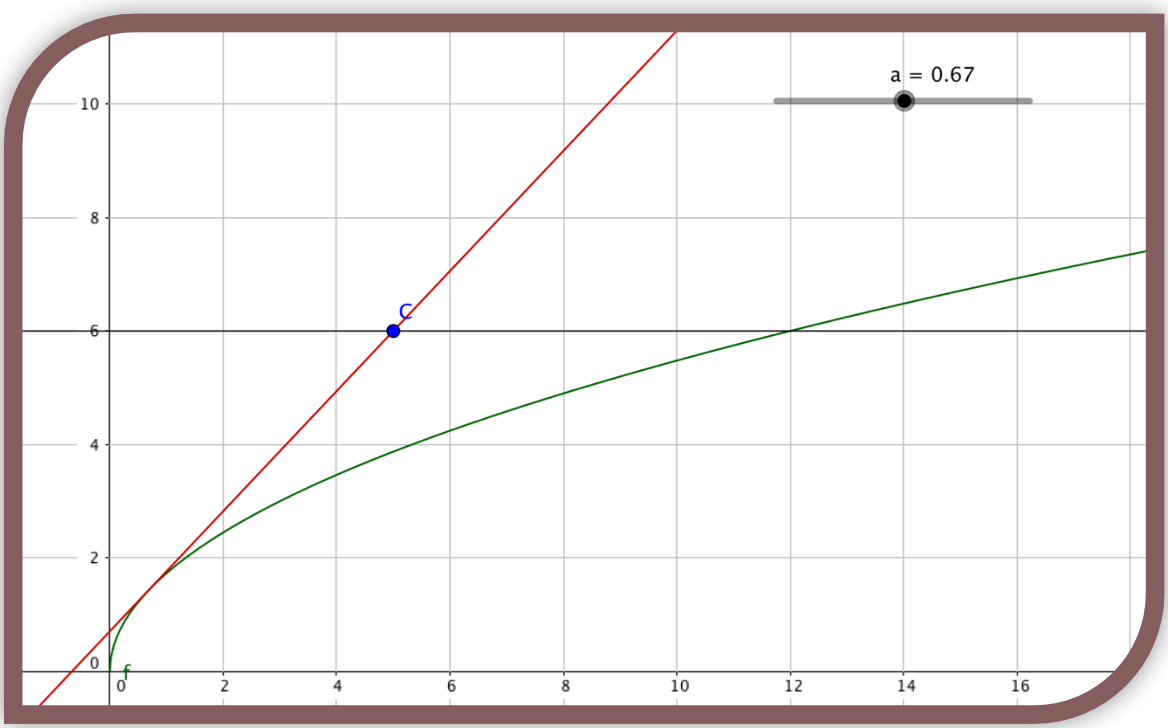
Pour ceux qui aiment les vidéos, une animation est disponible sur le lien suviant :

https://videopress.com/v/QHluBwL8

Sur GeoGebra, on trace C_f puis on construit un curseur a pouvant varier sur un intervalle bien choisi.

On demande à GeoGebra de tracer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a.
On fait varier a jusqu'à ce que la tangente passe bien par le point C. Alors on peut vérifier si cela correspond bien aux valeurs trouvées :

$$a = 19 - 4\sqrt{21}$$



$$a = 19 + 4\sqrt{21}$$