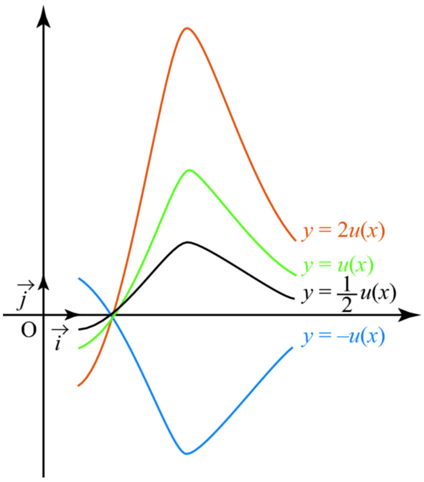
FONCTIONS DE REFERENCES ET VARIATIONS DE FONCTIONS ASSOCIEES



Chapitre 2

Fonctions de références et variations de fonctions associées

Classe de première. Il s'agit d'un chapitre très important qui va poser les bases de toute la suite.

Fonctions de références et variations de fonctions associées

I. FONCTION MATHEMATIQUE

1. Définition

Une fonction numérique notée f est une relation qui à un nombre réel x associe un unique nombre réel y noté $f(x)$. On écrit alors :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Vocabulaire

- On dit que $f(x)$ est l'image de x par f.
- x est un antécédent de $f(x)$ par f.

Exemples

- $f(x) = 2x - 5$ est une fonction affine.
- $f(x) = 2x^2 - 3x + 3$ est une fonction du second degré.

2. Ensemble de définition

Définition

L'ensemble de définition d'une fonction est l'ensemble des valeurs de la variable x que la fonction f peut transformer.

Exemple, exercices d'application

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f(x) = \frac{4}{2x^2+3x-2}$
ainsi que de la fonction $f(x) = \sqrt{4x + 2}$.

I. VARIATIONS DE FONCTIONS

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soient a et b deux réels de cet intervalle I. Alors on dit que

- f est croissante sur I si et seulement si pour tout a et b, on a : $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$
- f est décroissante sur I si et seulement si pour tout a et b, on a : $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$
- f est constante sur I si et seulement si pour tout a et b, on a : $a < b \Rightarrow f(a) = f(b)$
- f est monotone sur I si et seulement si f est croissante ou décroissante sur I.

Méthode pour étudier les variations

Pour étudier les variations d'une fonction monotone sur un intervalle I, on choisit d'abord des réels a et b sur cet intervalle I tels que $a < b$. Ensuite on réduit et on factorise si possible l'expression $f(b) - f(a)$. Alors s'en suit deux cas :

- Si $f(b) - f(a) > 0$ alors la fonction f est croissante.
- Si $f(b) - f(a) < 0$ alors la fonction f est décroissante.

Exemple, exercice d'application

Soit la fonction $f(x) = 4x - 4$. Démontrer que cette fonction est croissante sur $\mathbb{R}$.

II. FONCTIONS DE REFERENCES

1. Fonction affine

A. DEFINITION-PROPRIETE

Une fonction affine f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui peut se mettre sous la forme :

$f(x) = ax + b$ **où** a **et** b **sont des réels.**

Remarques

Le signe du coefficient directeur a donne les variations de la fonction :

- Si a est positif la fonction est croissante.
- Si a est négatif la fonction est décroissante.

Le nombre b est appelé l'ordonnée à l'origine.

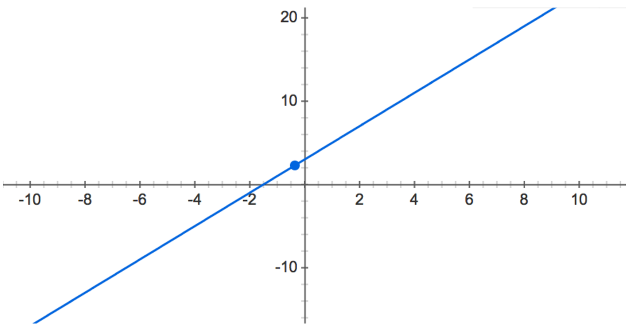
B. SIGNE D'UNE FONCTION AFFINE

Soit f une fonction affine. On a alors : $f(x) = ax + b$ où $a \neq 0$. Dans ces conditions, on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	signe de $-a$	0	signe de a

C. REPRESENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION AFFINE

La représentation graphique d'une fonction affine est toujours une droite, voici par exemple la représentation graphique de la fonction $f(x) = 2x + 3$:



2. Fonction carrée

A. DEFINITION

La fonction carrée est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2$$

Remarques

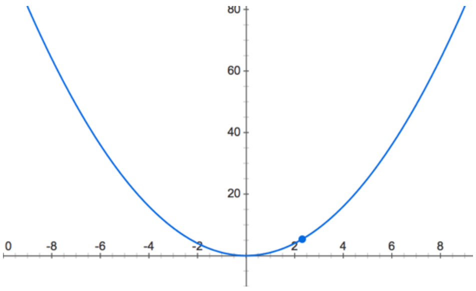
La fonction carrée est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$.

La représentation graphique de la fonction carrée est une parabole dont le somment est l'origine du repère.

La fonction carrée est toujours positive sur $\mathbb{R}$.

B. REPRESENTATION GRAPHIQUE

Voici la représentation graphique de la fonction carrée :



3. Fonction inverse

A. DEFINITION

La fonction inverse est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

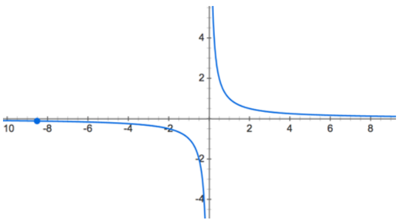
Remarques

La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

La représentation graphique de la fonction inverse est une hyperbole dont le centre de symétrie est l'origine du repère.

B. REPRESENTATION GRAPHIQUE

Voici la représentation graphique de la fonction inverse :



4. Fonction racine carrée

A. DEFINITION

La fonction racine carrée est la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

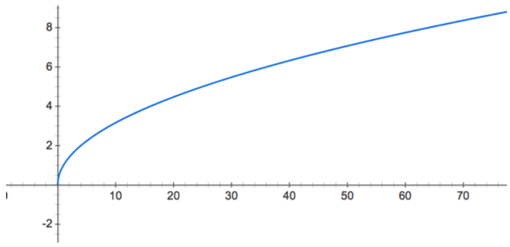
$$f(x) = \sqrt{x}$$

Remarques

La fonction racine carrée est croissante et positive sur $\mathbb{R}_+$.

B. REPRESENTATION GRAPHIQUE

Voici la représentation graphique de la fonction racine carrée :



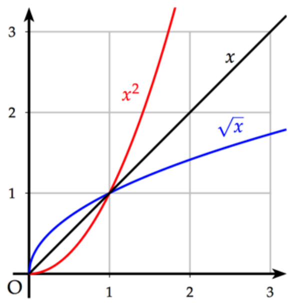
5. Comparaison des fonctions carrées, identité et racine carrée

Théorème

Pour tous réels x positif, on a les relations suivantes :

- Si $x \in [0; 1]$, alors : $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$
- Si $x \in [1; +\infty[$, alors : $\sqrt{x} \leq x \leq x^2$

Illustration graphique de ce théorème



6. Fonction valeur absolue

A. DEFINITION

La fonction valeur absolue d'une nombre x notée $|x|$, est utilisée lorsqu'on s'intéresse à un nombre sans pour autant s'intéresser à son signe. On a alors :

$|x| = x$ **si** $x \geq 0$
$|x| = -x$ **si** $x < 0$

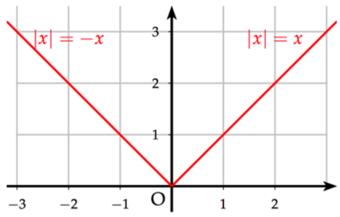
Exemples

B. PROPRIETES SUR LA FONCTION VALEUR ABSOLUE

- $\forall\, x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x|$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$ (Inégalité triangulaire).

C. VARIATIONS ET REPRESENTATION GRAPHIQUE

La fonction valeur absolue est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$. Voici sa représentation graphique :



III. SENS DE VARIATION DES FONCTIONS ASSOCIEES

1. Somme de fonctions

Théorème

Soit k un réel et deux fonctions u et v définies sur un intervalle I. Alors :

- Les fonctions u et $u+k$ ont les mêmes variations.
- Si les fonctions u et v sont croissantes alors la fonction $u+v$ est croissante.
- Si les fonctions u et v sont décroissantes alors la fonction $u+v$ est décroissante.
- Si les fonctions u et v sont de variations contraires alors on ne peut pas connaître à l'avance les variations de la fonction $u+v$.

Exemples

2. Produit par une constante

Soit un réel λ et une fonction u définie sur un intervalle I. Alors :

- Si $\lambda > 0$, alors u et λu ont les mêmes variations.
- Si $\lambda < 0$, alors u et λu sont de variations contraires.

Exemples

3. Racine carrée

Soit une fonction u définie sur un intervalle I. Alors :

- Si la fonction u est positive sur I, alors les fonctions u et $\sqrt{u}$ ont les mêmes variations.

Exemples :

4. Inverse

Soit u une fonction définie sur un intervalle I. Alors :

- Si la fonction u est non nulle et si u a un signe constant sur I, alors les fonctions u et $\frac{1}{u}$ ont des variations contraires.

Exemples