BAC S – Nouvelle Calédonie-Novembre 2013-Exercice 4

Enoncé :

http://www.maths-france.fr/Terminale/TerminaleS/ProblemesBac/AnnalesThematiques/Complexes/2013-nov-nouvelle-caledonie-exo4-enonce.pdf

Question 1

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

Calculons le module de $1+i$:

$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

Pour trouver l'argument, on doit résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

L'argument du nombre complexe est donc :

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

Finalement on obtient la forme exponentielle de $1+i$:

$$\begin{aligned} 1+i &= \sqrt{2}\times e^{\frac{i\pi}{4}} \\ (1+i)^{4n} &= \left(\sqrt{2}\times e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^{4n} \\ &= \left(4\times e^{i\pi}\right)^{n} \\ &= (-4)^n \end{aligned}$$

On peut donc dire que l'affirmation est vraie

Question 2

Déterminons les solutions de l'équation :

$$(z-4)(z^2-4z+8)=0$$

Soit on a $z=4$

Ou bien nous avons :

$$z^2-4z+8=0$$

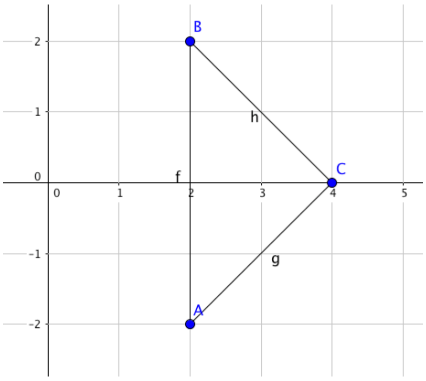
On calcule le discriminant de cette équation du second degré :

$$\Delta=(-4)^2-4\times1\times8=16-32=-16<0$$

Ainsi, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1=\frac{4-i\sqrt{16}}{2}=2-2i$$
$$z_2=2+2i$$

On obtient le triangle suivant :



On obtient un triangle isocèle en C. Comme B est le symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses, $AB=4$. Et par construction on peut dire que la hauteur issue de C a pour longueur 2 d'où l'aire :

$$Aire=\frac{b\times h}{2}=\frac{4\times2}{2}=4\,unités\ d'aire$$

On en déduit que l'affirmation est fausse.

Proposition 3

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$, on a :

Factorisons par $e^{i\alpha}$:

$$1 + e^{2i\alpha} = e^{i\alpha}\left(\frac{1}{e^{i\alpha}} + e^{i\alpha}\right)$$
$$= e^{i\alpha}\left(e^{-i\alpha} + e^{i\alpha}\right)$$
$$= e^{i\alpha}\left(\cos(-\alpha) + isin(-\alpha) + \cos(\alpha) + isin(\alpha)\right)$$
$$= e^{i\alpha}\left(\cos(\alpha) - isin(\alpha) + \cos(\alpha) + isin(\alpha)\right)$$
$$= 2e^{i\alpha}\cos(\alpha)$$

On peut donc dire que l'affirmation est vraie.

Question 4

Déterminons la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{1}{2}(1+i)$:

$$\frac{1}{2}(1+i) = \frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times e^{\frac{i\pi}{4}}$$

M_n a donc pour affixe : $\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^n$

Les points O, A et M_n sont alignés si et seulement si on a :

$$(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM_n}) = k\times\pi$$

Où k est un entier.

Or :

$$(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM_n}) = \arg\left(\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^n}{\frac{\sqrt{2}}{2}\times e^{\frac{i\pi}{4}}}\right) = \arg\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}\times e^{\frac{i\pi(n-1)}{4}}\right)$$
$$= \arg\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}\right) + \arg\left(e^{\frac{i\pi(n-1)}{4}}\right)$$
$$0 + \left(\frac{n-1}{4}\right)\times\pi = \left(\frac{n-1}{4}\right)\times\pi$$

Affirmation vraie

Question 5

Soit $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

Calculons :

$$1 + j + j^2 = 1 + e^{\frac{2i\pi}{3}} + \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^2$$
$$= 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0$$

Affirmation vraie