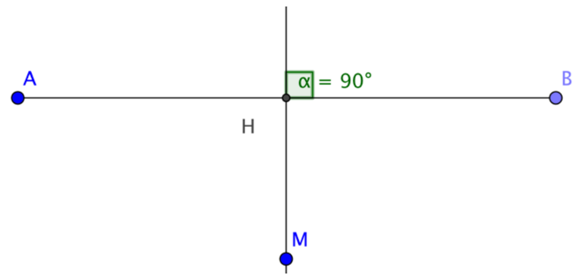
Corrigé – première s – exercices vecteurs – géométrie plane – dérivation

Exercice 1

Question 1.a

On a la figure suivante :



On souhaite que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = 10$

$$\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}\right) = 10$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HM} = 10$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = 10$$

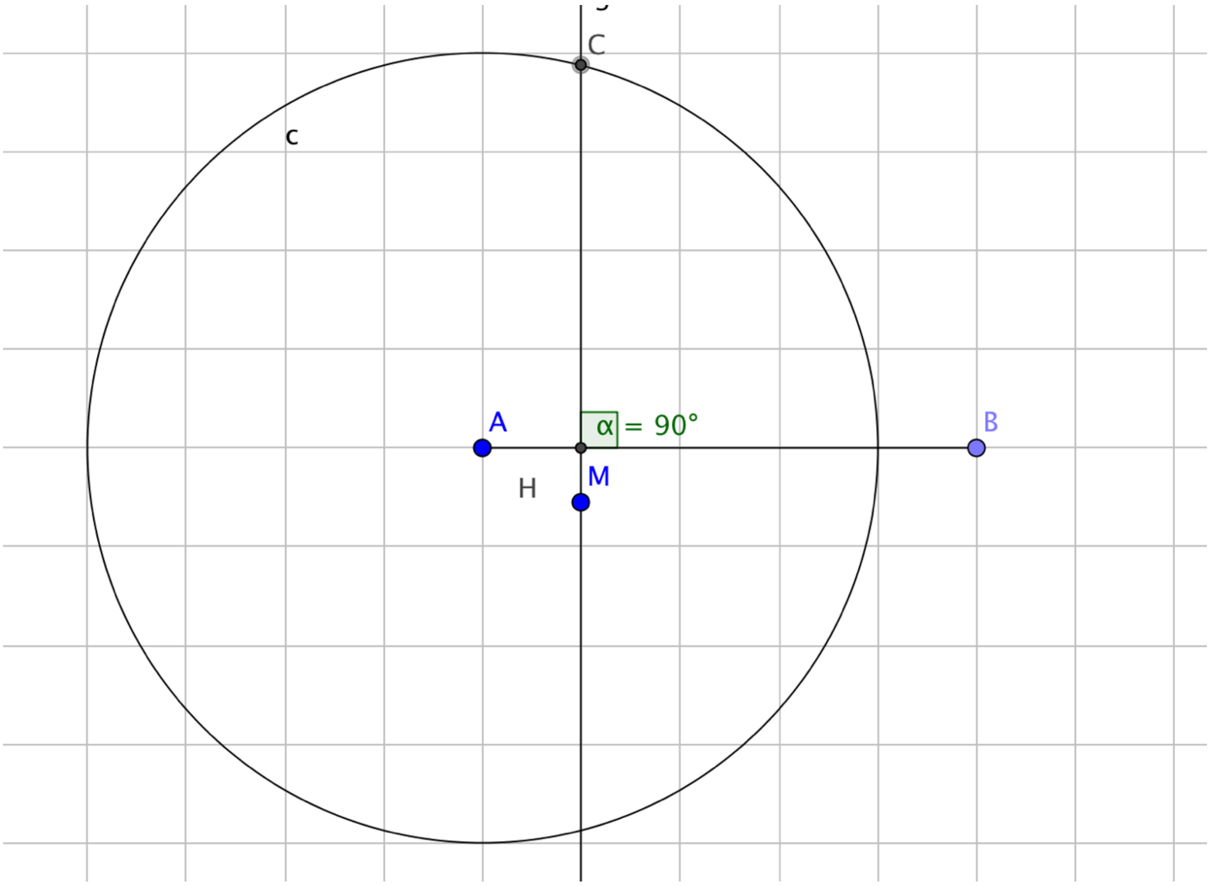
Ici on remarque que le point H est nécessairement sur la demi-droite $[AB)$ car $10 > 0$. De plus les vecteurs $\overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{AH}$ sont colinéaires de même sens d'où :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = AB\times AH = 10$$
$$AH = \frac{10}{5} = 2$$

On en déduit que l'ensemble des points M satisfaisant $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = 10$ est la droite notée (d) passant par le segment $[AB]$, telle que $AH = 2$ où H est le projeté orthogonal de M sur $[AB]$.

Question 1.b

On en déduit la construction d'un point C satisfaisant les conditions de la question. Sur la droite (d), on trouve un point C situé à une distance de 4 du point A :



Question 2.a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}\right)\\ &= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}\\ &= -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}-\frac{7}{5}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}\\ &= -10-\frac{7}{5}\times 25=-45\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}.\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}AC^2=\frac{3}{2}\times 4\times 4=24$$

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}=-\frac{7}{5}\overrightarrow{AB}.\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{7}{5}\times\frac{3}{2}\times\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-\frac{21}{10}\times 10=-21$$

Question 2.b

$$\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}\right).\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}\right)$$

$$= \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AD}$$
$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.\left(-\frac{7}{5}\overrightarrow{AB}\right) - \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}$$
$$= 10 + \frac{7}{5}\times 25 - 24 - 21 = 0$$

Question 2.c

D'après la question précédente, on peut dire que les droites (BE) et (CD) sont perpendiculaires, on en déduit que (CD) est la hauteur du triangle BDE issue de D.

Exercice 2

Question 1

Calculons dans un premier temps les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AC}(-5;-4)$$

Déterminons l'équation cartésienne de la droite d_1 :

$$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} = 0$$
$$\begin{pmatrix} x+7 \\ y+1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix} = -5x - 35 - 4y - 4 = 0$$
$$-5x - 4y - 39 = 0$$

Question 2

Déterminons les coordonnées d'un vecteur normal $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BC}(7;-1)$$

On en déduit une équation cartésienne de la hauteur issue de A dans le triangle ABC :

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AM} = 0$$
$$\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x-5 \\ y-2 \end{pmatrix} = 7x - 35 - y + 2 = 7x - y - 33 = 0$$

Question 3

Déterminons le l'intersection des deux droites. Pour cela, on résout le système suivant :

$$\begin{cases} 7x - y - 33 = 0 \\ -5x - 4y - 39 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 7x - 33 \\ -5x - 4(7x - 33) - 39 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 7x - 33 \\ -33x + 93 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 7\times\frac{31}{11} - 33 = -\frac{146}{11} \\ x = -\frac{93}{-33} = \frac{31}{11} \end{cases}$$

Les coordonnées du point d'intersection sont finalement :

$$\begin{pmatrix} \frac{31}{11} \\ -\frac{146}{11} \end{pmatrix}$$

Ce point est appelé orthocentre.

Exercice 3

Nous souhaitons que x_0 soit positif et que y_0 le soit également. On en déduit que $x_0 \in]0; 1[$.

On a d'abord $f'(x) = -2x$

Calculons alors l'équation de la tangente en x_0 :

$$\begin{aligned} y &= f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ y &= -2x_0(x - x_0) + 1 - x_0^2 \\ y &= -2x_0\times x + 2x_0^2 + 1 - x_0^2 \\ y &= -2x_0\times x + x_0^2 + 1 \end{aligned}$$

Déterminons maintenant l'ordonnée du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des ordonnées ainsi que l'abscisse du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses.

Ordonnée du point B :

$$y_B = x_0^2 + 1$$

Abscisse du point A :

$$x_A = \frac{x_0^2 + 1}{2x_0}$$

Calculons alors l'aire du triangle rectangle OAB :

$$g(x_0) = \frac{OA \times OB}{2} = \frac{\frac{x_0^2 + 1}{2x_0} \times (x_0^2 + 1)}{2}$$

$$g(x_0) = \frac{(x_0^2 + 1)^2}{4x_0}$$

On étudie les variations de cette fonction sur $]0; 1[$:

$$g'(x_0) = \frac{2 \times 2x_0(x_0^2 + 1) \times 4x_0 - 4(x_0^2 + 1)^2}{(4x_0)^2}$$

$$g'(x_0) = \frac{3{x_0}^4 + 2{x_0}^2 - 1}{4{x_0}^2}$$

On résout l'équation :

$$3{x_0}^4 + 2{x_0}^2 - 1 = 0$$

On effectue le changement de variable suivant :

$$X = x_0^2$$

d'où :

$$3X^2 + 2X - 1 = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 16 > 0$$

On trouve donc deux solutions :

$X = \frac{-2-\sqrt{16}}{6} = -1$ ce qui est impossible car X est un carré donc positif.

$$X = \frac{-2 + \sqrt{16}}{6} = \frac{1}{3}$$

On en déduit :

$$x_0^2 = \frac{1}{3}$$
$$x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \; ou \; x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

On en déduit finalement une factorisation du numérateur de la dérivée :

$$3{x_0}^4 + 2{x_0}^2 - 1 = 3\left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)(x^2 + 1)$$

D'où :

$$g'(x_0) = \frac{3{x_0}^4 + 2{x_0}^2 - 1}{4{x_0}^2} = \frac{3\left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)(x^2 + 1)}{4{x_0}^2}$$

Comme $x_0 \in]0;1[$ on en déduit que le signe de $g'(x_0)$ ne dépend que de $\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

On en déduit que la fonction g atteint son minimum en $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.