II – Suites arithmétique

Nous venons de voir les généralités sur les suites numériques :

généralités sur les suites numériques.

- * définiton explicite.
- * définition implicite, par récurrence, récursive.
- * les variations d'une suite.

Dans la grande famille des suites numériques, il faut connaître en particulier deux types de suite : $\boxed{\text{suites arithmétique}}$ et suite géométriques.

1- Définition

Une suite arithmétique est une suite de nombre dont tous les termes successifs sont séparés (additivement) par la même constante r appelé raison.

Exemple :

$2 \xrightarrow{+2} 4 \xrightarrow{+2} 6 \xrightarrow{+2} 8 \xrightarrow{+2} 10 \xrightarrow{+2} 12$ etc.

$2 \xrightarrow{-2} 0 \xrightarrow{-2} -2 \xrightarrow{-2} -4 \xrightarrow{-2}$ etc.

a – Définition explicite :

Soit (U_n) une suite arithmétique, dès lors sa définition explicite est :

$$\boxed{U_n = U_0 + n \times r}$$

U_0 est le premier terme.

r est la raison.

n est l'indice qui varie.

Exemple : $U_n = 3 + 2n$.

$U_0 = 3$

$r = 2$.

$u_0 = 3 + 2 \times 0 = 3$ $\big) +2$
$u_1 = 3 + 2 \times 1 = 5$
$u_2 = 3 + 2 \times 2 = 7$ $\big) +2$
$\vdots$

Attention !!! la formule n'est pas toujours : $u_n = u_0 + n r$.
Si on a u_1 au lieu de u_0, la formule devient :

$$u_n = u_1 + (n-1) \times r.$$

Exemple : Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 4$ et de raison $r = 3$. Donner l'expression de u_n en fonction de n.

$$\boxed{u_n = 4 + (n-1) \times 3}$$

b - Définition récursive

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
Alors sa définition récursive vaut :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + r. \\ u_0 \text{ est précisé.} \end{cases}$$

Exemple : $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 8. \\ u_0 = -7 \end{cases}$ Calculer u_1 ; u_2 ; et u_3.

$u_1 = u_0 + 8$.
$u_1 = -7 + 8 = 1$.

$u_2 = 1 + 8 = 9$.
$u_3 = 9 + 8 = 17$.

2 - Variation

Propriété : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

Alors si $r \geq 0$ alors (U_n) est croissante.

Si $r \leq 0$ alors (U_n) est décroissante.

Si $r = 0$ alors (U_n) est constante.

3- Somme des termes d'une suite arithmétique.

Soit (U_n) une suite arithmétique. Alors on peut calculer la somme des termes d'une suite arithmétique on a :

$$\sum_{i=0}^{n} U_i = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$$

$$= \frac{(\text{nbre de termes}) \times (1^{er} \text{ terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

Exemple : Le premier janvier 2018 ton père te donne 10 €. Puis chaque mois il te donne 3 euros de plus.

janv.	10 €	10 €	total
fév.	13 €	23 €	
mars :	16 €	39 €	

On suppose qu'on ne dépense pas d'argent.

1) Combien d'argent auras-tu à la fin de la première année ?

2) Au bout de combien de mois, tu auras assez d'argent pour t'acheter une moto de 25 782 €.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$, On pose $U_n = U_0 + n r$.

$U_n = 10 + n \times 3 = 10 + 3n$.

$U_{11} = 10 + 3 \times 11$
$= 10 + 33 = 43$.

Soit S_n l'argent gagné au bout n mois. On cherche S_{11} :

$$S_{11} = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{11} = 12 \times \frac{(10+43)}{2} = 318 €$$

2) $U_0 + U_1 + \dots + U_n$ = nbre de termes $\times \frac{(1^{er}\text{ terme} + \text{dernier terme})}{2} = 25782$

$$= \frac{(n+1) \times (10 + 10+3n)}{2} = 25782.$$

$$= (n+1)(20+3n) = 51564.$$

$$20n + 3n^2 + 20 + 3n = 51564.$$

$$3n^2 + 23n + 20 = 51564.$$

$$3n^2 + 23n + 20 - 51564 = 0$$

$$\boxed{3n^2 + 23n - 51544 = 0.}$$

$$\Delta = 23^2 - 4 \times 3 \times (-51544) = 619\ 057 > 0.$$

$$n_1 = \frac{-23 - \sqrt{619057}}{2 \times 3} = -134{,}966959$$ impossible car on cherche un nombre de mois.

$$n_2 = \frac{-23 + \sqrt{619057}}{2 \times 3} = 127{,}3$$

On peut donc dire qu'on aura assez d'argent au bout de 128 mois.

III - Suite géométrique

1) Définition.

On dit qu'une suite est géométrique si et seulement si chacun de ses termes successifs

sont séparés (multiplicativement) par la même constante appelée raison et notée
q.

Exemple de suite géométrique : $1 \overset{\times 2}{;} 2 \overset{\times 2}{;} 4 \overset{\times 2}{;} 8 \overset{\times 2}{;} 16 \overset{\times 2}{;} 32 \overset{\times 2}{;} 64$ etc.

a- Définition explicite.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on dit que (V_n) est une suite géométrique définie explicitement si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ on } \boxed{V_n = V_0 \times q^n}$$

Attention ⚠ Si au lieu d'avoir V_0, on a V_1, la formule devient :

$$\boxed{V_n = V_1 \times q^{n-1}}$$

2- Les variations d'une suite géométrique

Plusieurs cas de figure se présentent :

* Si $V_0 > 0$ et si $q > 1$ alors la suite (V_n) est croissante.
* Si $V_0 < 0$ et si $q > 1$ alors la suite (V_n) est décroissante.
* Si $V_0 < 0$ et si $0 < q < 1$ alors la suite (V_n) est croissante.
* Si $V_0 > 0$ et si $0 < q < 1$ alors la suite (V_n) est décroissante.
* Si $q = 1$ alors la suite (V_n) est constante
* Si $q < 0$ alors la suite est ni croissante ni décroissante.