Aide aux devoirs Éric.

Démontrer que tout nombre premier supérieur ou égal à 5 s'écrit sous la forme $6k+1$ ou $6k-1$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5 alors
$p > 6$ car 6 n'est pas premier $(3 \times 2 = 6)$.

Or tout nombre premier p supérieur à 6 peut s'écrire sous la forme :

* $p = 6 \times k + 0$ (multiple de 6).
* $p = 6 \times k + 1$ (multiple de 6 plus 1).
* $p = 6 \times k + 2$ (multiple de 6 plus 2).
* $p = 6 \times k + 3$ (multiple de 6 plus 3).
* $p = 6 \times k + 4$ (multiple de 6 plus 4).
* $p = 6 \times k + 5$ (multiple de $6 + 5$).

$\Leftrightarrow p = 6 \times k + 6 - 1 = 6(k+1) - 1 = 6K - 1.$

Illustration:

$12 = 6 \times 2$
$13 = 6 \times 2 + 1$
$14 = 6 \times 2 + 2$
$15 = 6 \times 2 + 3$
$16 = 6 \times 2 + 4$
$17 = 6 \times 2 + 5$
$18 = 6 \times 3$

Tous les nombres peuvent s'écrire ainsi

On revient à notre situation initiale.

Ainsi Si $p = 6k$, p n'est pas premier car multiple de 6.

Si $p = 6k+1$, p peut être premier.

Si $p = 6k+2$, p n'est pas premier car multiple de 2.

Si $p = 6k+3$, p " " " 3.

Si $p = 6k+4$, p " " " 2.

Si $p = 6k-1$, p peut être premier.

Donc si p est premier, il ne peut certainement pas s'écrire sous la forme

$$6k \ ; \ 6k+2 \ ; \ 6k+3 \ ; \ 6k+4$$

Il ne reste que les formes $6k+1$ ou $6k-1$.

CCL: Donc si p est un nombre premier supérieur à 5 alors.

$$\boxed{\exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.q } \quad p = 6k+1 \text{ ou } p = 6k-1.}$$