Exercice n°4 :

Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $2^{3n}-1$ multiple de 7

C-à-d : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.q } 2^{3n}-1 = 7k}$

Initialisation : pour $n=1$, on a $2^{3\times}-1 = 1-1 = 0 = 7\times 0$.

Donc la propriété est initialisée.

Hérédité : On suppose que pour un certain entier naturel n, on a : $2^{3n}-1 = 7k$, $k\in\mathbb{Z}$

Démontrons qu'on a : $2^{3(n+1)}-1 = 7K$, $K\in\mathbb{Z}$.

$$2^{3(n+1)}-1 = 2^{3n+3}-1 = 2^{3n}\times 2^{3}-1$$
$$= 8\times 2^{3n}-1 = (7+1)\times 2^{3n}-1.$$
$$= 7\times 2^{3n}+2^{3n}-1.$$ or par hypothèse de récurrence $2^{3n}-1 = 7k$.
$$= 7\times 2^{3n}+7k = 7(2^{3n}+k).$$ Or $2^{3n}+k\in\mathbb{Z}$. On pose $K = 2^{3n}+k$.
$$= 7K.$$

CCl : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ 2^{3n}-1 \text{ est multiple de } 7.}$

Exercice 5 : Démontrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $n! \geq 2^{n-1}$.

Initialisation : pour $n=1$, on a : $1! = 1$. $2^{1-1} = 2^0 = 1$.

Or $1\geq 1$.

donc $\boxed{1! \geq 2^{1-1}}$ la propriété est initialisée.

Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$. on suppose que $n! \geq 2^{n-1}$.

Montrons que $(n+1)! \geq 2^{n+1-1}$ i.e $(n+1)! \geq 2^{n}$.

D'après l'H.R, on a : $n! \geq 2^{n-1}$ (1)

Or $n+1 \geq 2$ (2) car $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) et (2) sont des inégalités de même sens et de réels positifs.

Donc on peut les multiplier :

$$n! \times (n+1) \geq 2^{n-1} \times 2^1.$$

$$(n+1)! \geq 2^n.$$

CCl : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\boxed{n! \geq 2^{n-1}}$