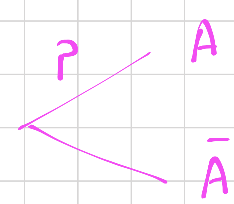
Séance du 25/10/19.

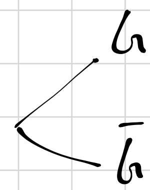
Correction d'un contrôle de Probabilité

Ex n° 2 :

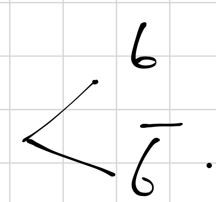
Rappel de cours : Schéma / Expérience / Épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui n'a que deux issues :



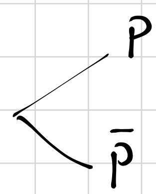
Exemple : Match de foot :



Lancé de dé :



pièce de monnaie :



On répète cette épreuve n fois de manière indépendante. Alors la variable aléatoire qui compte le nombre de fois que A est réalisé suit la loi binomiale de paramètres $(n ; p)$.

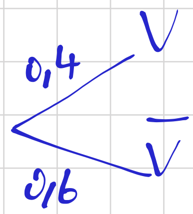
$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^{k} \times (1-p)^{n-k}.$$

$P(X=k)$ correspond à la probabilité de réaliser l'événement A k fois lorsqu'on répète l'épreuve de Bernoulli n fois.

Ex : On lance une pièce de monnaie 5 fois. $(n = 5)$. On veut savoir quelle est la probabilité d'obtenir pile 3 fois.

$$P(X=3) = \binom{5}{3} \times 0{,}5^{3} \times (1-0{,}5)^{2}.$$

1) L'épreuve est bien une expérience de Bernoulli :



V : la personne interrogée est vaccinée.

On répète cette expérience n fois de manière indépendante. Alors la variable aléatoire X qui compte le nombre de personnes vaccinées suit la loi binomiale de paramètres $(n ; 0{,}4)$.

2) a) Ici, $n = 40$. ; $p = 0{,}4$. On cherche $P(X=15)$.

2 méthodes : $P(X=15) = \binom{40}{15} \times 0{,}4^{15} \times (1-0{,}4)^{40-15}$.

On peut taper ça à la calculatrice :

$$\boxed{P(X=15) \simeq 0{,}123 \text{ arrondi à } 10^{-3}}$$

On peut utiliser la fonction BinomFdp :

BinomFdp$(40, 0{,}4 ; 15) \simeq 0{,}123$ à 10^{-3} près.

b) On cherche la probabilité qu'au moins la moitié des personnes soient interrogées : $P(X \geq 20). = P(X=20) + P(X=21) + \dots + P(X=40)$

Il est trop long de calculer tous ces termes.

Astuce : $P(X \geq 20) = 1 - P(\overline{X \geq 20})$. * $P(A) = 1 - P(\overline{A})$

$= 1 - P(X < 20)$. Or k est entier d'où :

$= 1 - P(X \leq 19)$

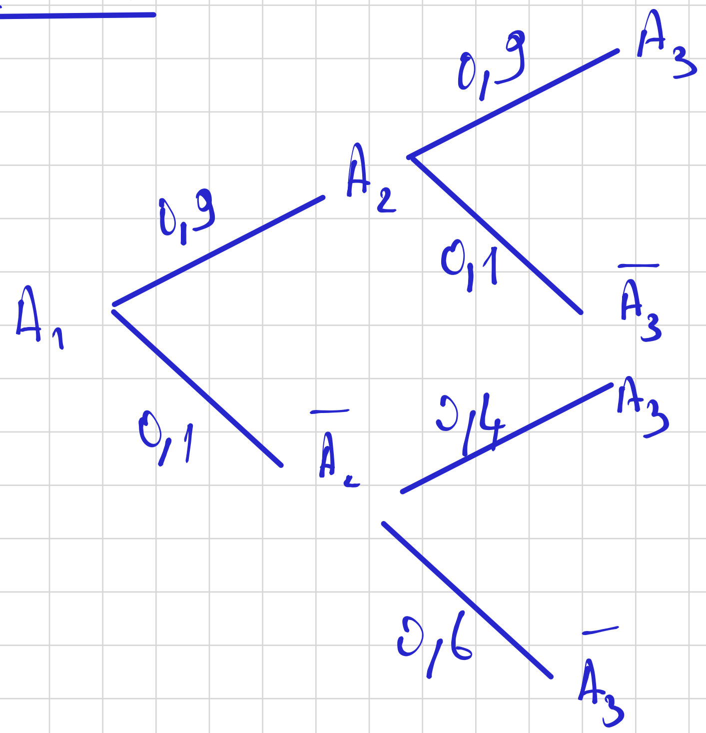
Or on peut calculer $P(X \leq 19)$ à la calculatrice avec la fonction BinomFrép : Alors : $P(X \geq 20) = 1 - P(X \leq 19)$

$P(X \geq 20 = 1 -$ BinomFrép$(40 ; 0{,}4 ; 19)$.

$$\boxed{P(X \geq 20) \simeq 0{,}130.}$$

Exercice n°4:

1)a)



Formule des probabilités totales:

1)b) Calculons $P(A_3)$:

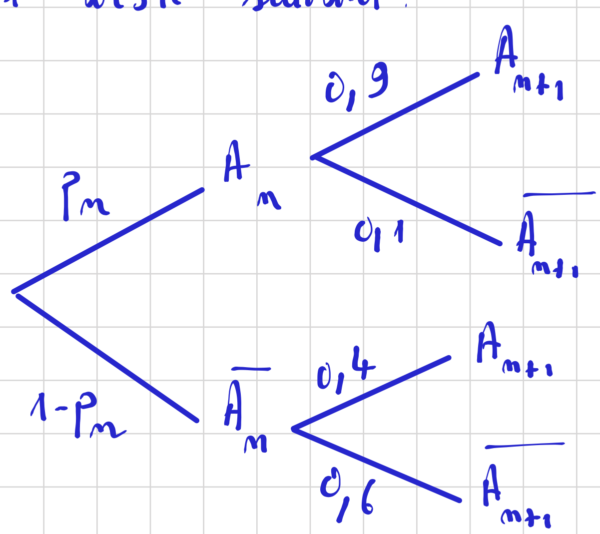
$$P(A_3) = P(A_2 \cap A_3) + P(\bar{A_2} \cap A_3)$$

$$P(A_3) = 0{,}9 \times 0{,}9 + 0{,}1 \times 0{,}4$$

$$\boxed{P(A_3) = 0{,}85.}$$

1)c) On cherche $P_{A_3}(A_2) = \dfrac{P(A_3 \cap A_2)}{P(A_3)} = \dfrac{0{,}9 \times 0{,}9}{0{,}85} = \boxed{0{,}95.}$

2) On a l'arbre suivant:



On cherche $p_{n+1} = P(A_{n+1})$.

$$P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(\bar{A}_n \cap A_{n+1})$$

$$P(A_{n+1}) = 0{,}9 \times p_n + 0{,}4 \times (1 - p_n)$$

$$P(A_{n+1}) = 0{,}9\, p_n + 0{,}4 - 0{,}4\, p_n.$$

$$\boxed{P(A_{n+1}) = 0{,}5\, p_n + 0{,}4.}$$

3)a) Démontrons par récurrence que:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad p_n > 0{,}8.$$

__Initialisation:__ $p_1 = 1$. Or $1 > 0{,}8$ donc $p_1 > 0{,}8$.

la proposition est initialisée.

__Hérédité:__ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $p_n > 0{,}8$

on veut montrer que $P_{n+1} > 0,8$.

Par hypothèse de récurrence :

$$P_n > 0,8 \quad \big) (\times 0,5).$$

$$0,5\, P_n > 0,4 \quad \big) (+ 0,4)$$

$$0,5\, P_n + 0,4 > 0,8.$$

$$\boxed{P_{n+1} > 0,8.}$$

La proposition est héréditaire.

<u>Conclusion :</u> La proposition est initialisée et héréditaire donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_n > 0,8.}$$

3) b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad P_{n+1} - P_n = 0,5 P_n + 0,4 - P_n.$

$$= -0,5\, P_n + 0,4.$$

Or $\quad P_n > 0,8 \quad \big) \times (-0,5)$

$$-0,5\, P_n < -0,4. \quad \big) + 0,4.$$

$$-0,5 P_n + 0,4 < 0.$$

$$P_{n+1} - P_n < 0.$$

Donc (P_n) est décroissante.

c) (P_n) est une suite décroissante et minorée par 0,8. Donc (P_n) est convergente.

4) a) Soit $n \geq 1$, $\quad V_n = P_n - 0,8.$

$$V_{n+1} = P_{n+1} - 0,8$$

$$V_{n+1} = 0,5\, P_n + 0,4 - 0,8$$

$$V_{n+1} = 0,5 P_n - 0,4.$$

$$V_{n+1} = 0,5(P_n - 0,8).$$

$$\boxed{V_{n+1} = 0,5\, V_n.}$$

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme $V_1 = P_1 - 0,8 = 1 - 0,8 = 0,2$.

b) (V_n) est une suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme $V_1 = 0,2$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = \boxed{0,2 \times 0,5^{n-1}}$.

Or $V_n = P_n - 0,8 \iff P_n = V_n + 0,8.$

$\iff \boxed{P_n = 0,2 \times 0,5^{n-1} + 0,8.}$

c) On sait que $(0,2 \times 0,5^{n-1})$ est une suite géométrique de raison $-1 < 0,5 < 1$. donc $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$. On en déduit que:

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} P_n = 0,8.}$$