Etude de fonction.

2) a) Soit $x \in]-1;+\infty[$, $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x^3}$.

On calcule la limite de f en $+\infty$:

$$f(x) = \frac{x\left(\frac{1}{x}-1\right)}{x^3\left(\frac{1}{x^3}+1\right)} = \frac{\frac{1}{x}-1}{x^2\left(\frac{1}{x^3}+1\right)}$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} - 1 = -1$ (1)

et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} + 1 = 1$

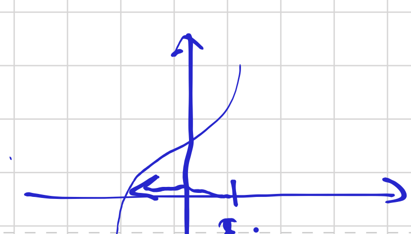
Par produit $\lim x^2\left(\frac{1}{x^3}+1\right) = +\infty$ (2)

Par quotient de (1) et (2), on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Donc $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$. // à l'axe des abscisses

Déterminons $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x)$: D'une part $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} 1-x = 2$.

D'autre part, $\lim\limits_{x \to -1} 1+x^3 = 0^+$.



$x > -1$

Par quotient de limites, on a $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty$.

Donc C_f admet une asymptote verticale d'éq° $x = -1$.

// à l'axe des ordonnées.

b) $$f'(x) = \frac{-1 \times (1+x^3) - 3x^2 \times (1-x)}{(1+x^3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-1 - x^3 - 3x^2 + 3x^3}{(1+x^3)^2} = \frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{(1+x^3)^2}$$

Or $\forall x \in]-1 ; +\infty[$, $(1+x^3)^2 > 0$. donc le signe de $f'(x)$ ne dépend que de $2x^3 - 3x^2 - 1$. Or d'après la question 1) on a :

x	-1		α		$+\infty$
$2x^3-3x^2-1$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	||	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

c) $T_0 : y = f'(0)(x-0) + f(0)$

Or $f'(0) = \dfrac{2 \times 0^3 - 3 \times 0^2 - 1}{(1+0^3)^2}$.

$y = -1x + 1$.

$y = -x + 1$.

$f'(0) = \dfrac{-1}{1} = -1$.

et $f(0) = \dfrac{1-0}{1+0^3} = 1$.

On étudie la posit° relative de T_0 par rapport à C :

$$f(x) - (-x+1) = \frac{1-x}{1+x^3} + x - 1 = \frac{1 - x + (x-1)(1+x^3)}{1+x^3}.$$

$$= \frac{\cancel{1}-\cancel{x}+\cancel{x}+x^4-\cancel{1}-x^3}{1+x^3} = \frac{x^4-x^3}{1+x^3} = \frac{x^3(x-1)}{1+x^3}.$$

Or la f^o $x \mapsto 1+x^3$ est croissante. et $1+(-1)^3 = 0$.
Donc $\forall x \in]-1;+\infty[$, $1+x^3>0$; on a alors le tableau de signe suivant :

x	-1		0		1		$+\infty$
x^3		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$1+x^3$		$+$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)-(-x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Pos° relative		"$\mathcal{C} \geq T_0$"		"$\mathcal{C} \leq T_0$"		"$\mathcal{C} \geq T_0$"	

$\geq$: au dessus.

d) faire la même chose.

e) Tracer la courbe.