Séance du 29/10/19.

TD sur les suites numériques.

n°15

c) $n^2 + 39n - 20\,790 = 0$.

$\Delta = 39^2 - 4 \times 1 \times (-20\,790)$.

$\Delta = 84\,681 > 0$.

$n_1 = \dfrac{-39 - \sqrt{84681}}{2 \times 1} = -165$ impossible car $n \in \mathbb{N}$ donc $n \geqslant 0$.

$n_2 = \dfrac{-39 + \sqrt{84681}}{2 \times 1} = 126$.

On peut donc forer 126 m avec le budget alloué.

n°22.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 5. \\ u_0 = 2. \end{cases}$

a) $u_1 = 2 \times u_0 + 5 = 2 \times 2 + 5 = 4 + 5 = 9$.

$u_2 = 2 \times u_1 + 5 = 2 \times 9 + 5 = 18 + 5 = 23$.

$u_3 = 2 \times u_2 + 5 = 2 \times 23 + 5 = 46 + 5 = 51$.

$u_4 = 2 \times u_3 + 5 = 2 \times 51 + 5 = 102 + 5 = 107$.

$u_5 = 2 \times u_4 + 5 = 2 \times 107 + 5 = 214 + 5 = 219$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n + 5$.

$v_0 = u_0 + 5 = 2 + 5 = 7$.

$\times 2$

$v_1 = u_1 + 5 = 9+5 = 14.$

$v_2 = u_2 + 5 = 23+5 = 28.$ $\times 2$

$v_3 = u_3 + 5 = 51+5 = 56.$ $\times 2$

$v_4 = u_4 + 5 = 107+5 = 112.$ $\times 2$

$v_5 = u_5 + 5 = 219+5 = 224.$ $\times 2.$

On peut conjecturer que (v_n) est une suite géométrique. On pour passer d'un terme au suivant, il semble qu'on multiplie toujours par 2.

c) Prouvons que (V_n) est géométrique.

Définition récursive d'une suite géométrique :

$$\boxed{\begin{cases} v_{n+1} = q \times V_n \\ v_0 \text{ précisé.} \end{cases}}$$

Or

$v_n = u_n + 5.$

$v_{n+1} = \boxed{u_{n+1}} + 5.$

$v_{n+1} = \boxed{2u_n + 5} + 5$

$v_{n+1} = 2u_n + 10.$

$v_{n+1} = 2(u_n + 5)$

$$\boxed{v_{n+1} = 2 \times v_n.}$$

Donc (v_n) est géométrique de raison 2 et de 1er terme :

$v_0 = u_0 + 5 = 7.$

On en déduit l'expression explicite de V_n :

$v_n = v_0 \times q^n.$

$v_n = 7 \times 2^n.$

Ex : $v_5 = 7 \times 2^5 = 7 \times 32 = 224$

Or $v_n = u_n + 5. \iff v_n - 5 = u_n.$

$\iff u_n = v_n - 5.$

$\iff \boxed{u_n = 7 \times 2^n - 5.}$

n°24

(u_n) est une suite géométrique : $u_{10} = 25$ et $u_{13} = 200$.

a) Si (u_n) est géométrique alors $u_n = u_0 \times q^n$.

$u_{10} = u_0 \times q^{10} = 25.$

$u_{13} = u_0 \times q^{13} = 200.$

$$\frac{u_{13}}{u_{10}} = \frac{200}{25} = 8.$$

$$\frac{\cancel{u_0} \times q^{13}}{\cancel{u_0} \times q^{10}} = 8.$$

$q^3 = 8 \iff q = 2.$ d'où $u_0 \times 2^{10} = 25.$

$u_0 \times 1024 = 25.$

$u_0 = \frac{25}{1024}$

$$u_n = \frac{25}{1024} \times 2^n.$$

b) $S = u_{10} + u_{12} + u_{14} + \dots + u_{20}.$

$= 25 + 100 + 400 + \dots + 25600.$

$\times 4 \quad \times 4 \quad \times 4 \quad \times 4$

$= 1^{er}\text{ terme} \times \frac{1 - q^{\text{nbre de termes}}}{1-q}.$

$= 25 \times \frac{1-4^6}{1-4} = 34125.$

n°26 :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 2^n - 2n + 2.$

$w_0 = 2^0 - 2\times 0 + 2 = 1 - 0 + 2 = 3.$

$w_1 = 2^1 - 2\times 1 + 2 = \cancel{2} - \cancel{2} + 2 = 2.$

$w_2 = 2^2 - 2\times 2 + 2 = 4 - 4 + 2 = 2.$

$\left.\begin{array}{l} w_1 - w_0 = 2 - 3 = -1. \\ w_2 - w_1 = 2 - 2 = 0. \end{array}\right\}$ donc (w_n) n'est pas arithmétique.

$\dfrac{w_1}{w_0} = \dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{w_2}{w_1} = \dfrac{2}{2} = 1.$ donc (w_n) n'est pas géométrique

2) a). Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -2n + 2.$

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$$

$\left.\begin{array}{l} u_{n+1} = -2\times(n+1) + 2 \\ u_{n+1} = -2n - 2 + 2. \\ u_{n+1} = \boxed{-2n+2} - 2. \\ u_{n+1} = u_n - 2. \end{array}\right\}$ donc (u_n) est arithmétique de raison -2.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $V_n = 2^n.$

$$\boxed{V_{n+1} = q \times V_n.}$$

$a^b \times a^c = a^{b+c}.$

$\left.\begin{array}{l} V_{n+1} = 2^{n+1} \\ V_{n+1} = 2^n \times 2^1 \\ V_{n+1} = 2 \times 2^n. \\ V_{n+1} = 2 \times V_n. \end{array}\right\}$ (V_n) est une suite géométrique de raison 2.

3) $S = w_0 + w_1 + \dots + w_{10}$.

$w_n = 2^n - 2n + 2$.

$w_n = 2^n + (-2n+2)$

$w_n = v_n + u_n$.

$S = v_0 + u_0 + v_1 + u_1 + \dots + v_{10} + u_{10}$.

$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{10} + v_0 + v_1 + \dots + v_{10}$.

$S = 11 \times \dfrac{(u_0 + u_{10})}{2} + v_0 \times \dfrac{1 - q^{11}}{1 - q}$.

Or $u_0 = -2 \times 0 + 2 = 2$.

$u_{10} = -2 \times 10 + 2 = -20 + 2 = -18$.

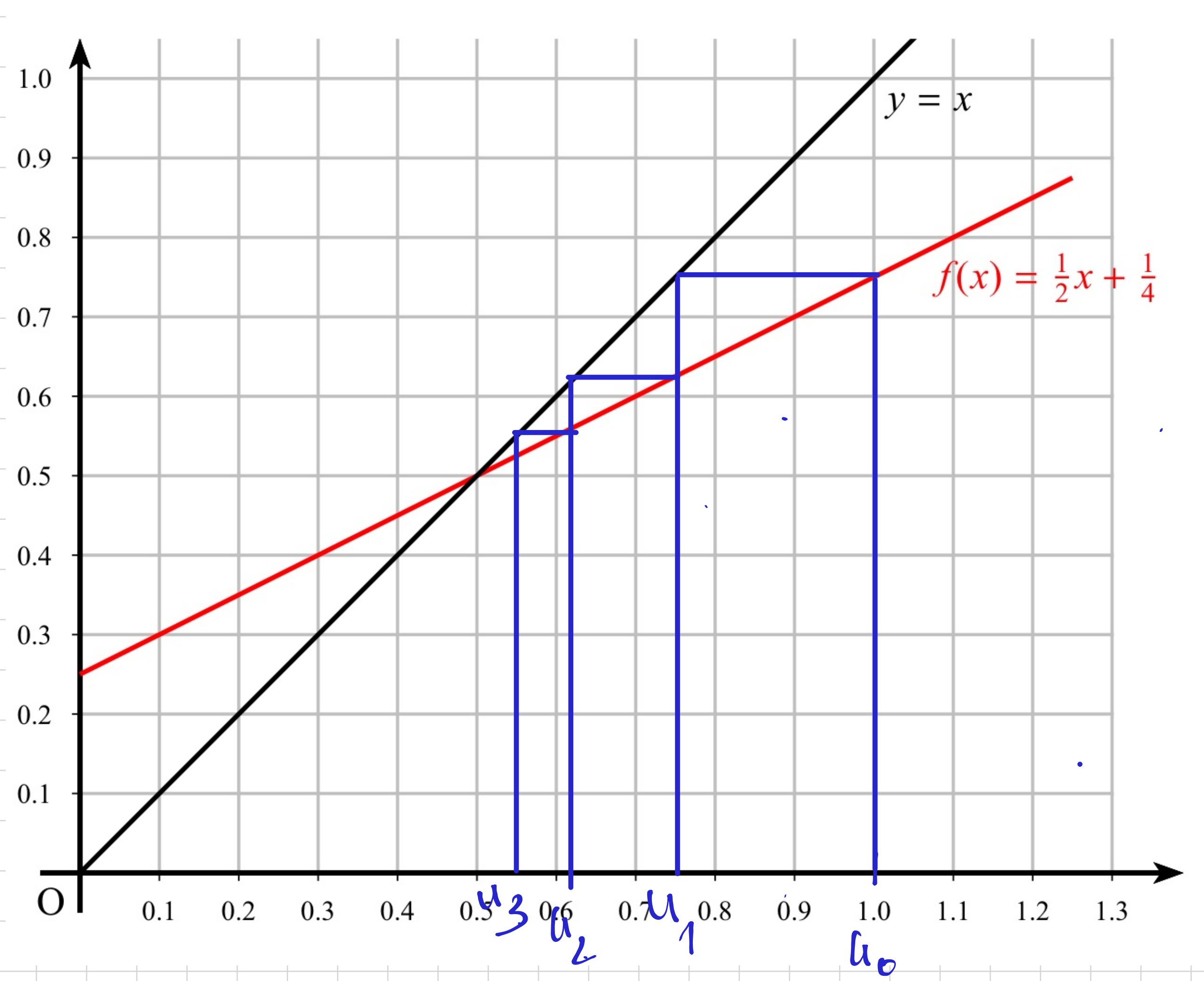
$v_0 = 2^0 = 1$.

$q = 2$.

$S = 11 \times \dfrac{(2 + (-18))}{2} + 1 \times \dfrac{1 - 2^{11}}{1 - 2}$.

$S = 1959$.

n° 28 :



On peut conjecturer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0{,}5$.

2 - On pose $v_n = u_n - \dfrac{1}{2}$.

a- $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{2}$

$v_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$.

$v_{n+1} = \frac{1}{2} u_n - \frac{1}{4}$

$v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$

$\boxed{v_{n+1} = \frac{1}{2} \times v_n.}$

Donc (v_n) est géométrique.

b) Comme (v_n) est géométrique,

$v_n = v_0 \times q^n$.

$v_0 = u_0 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

On sait que $v_n = u_n - \frac{1}{2}$.

$v_n + \frac{1}{2} = u_n$.

$u_n = v_n + \frac{1}{2}$.

$\boxed{u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}}$.

c) On cherche la limite de (u_n).

Or $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

donc. $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$.

Donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}$. Conjecture vérifiée.

n°29: