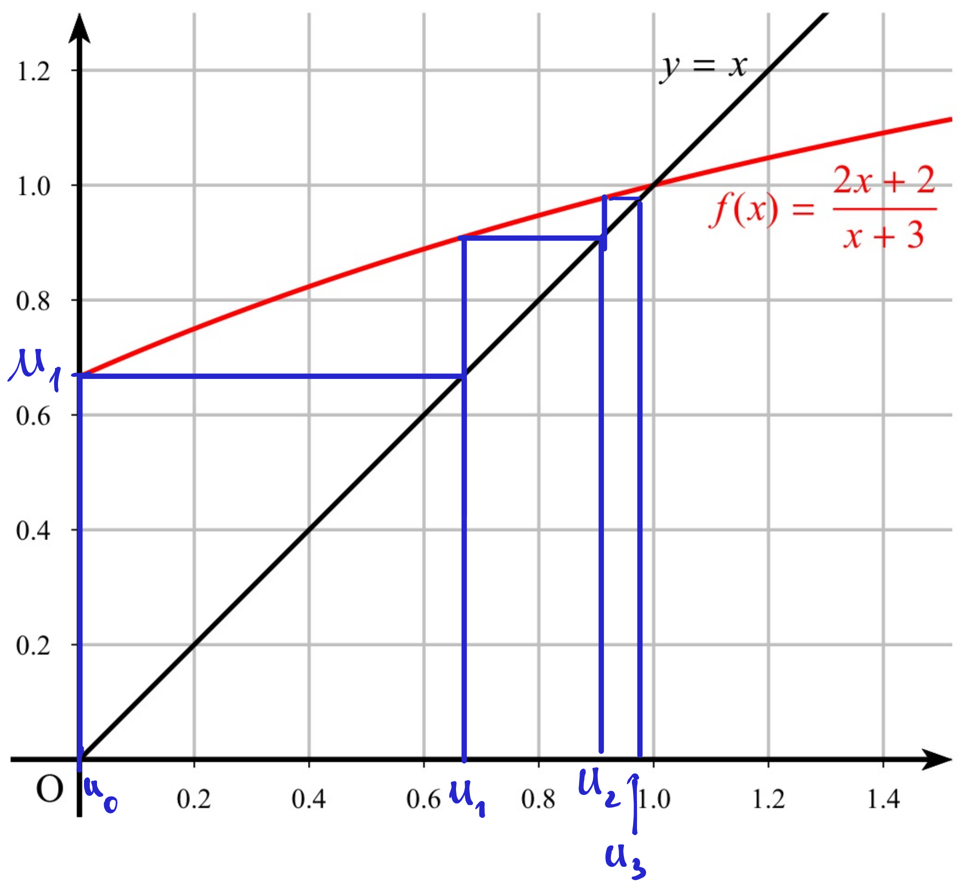
TD sur les suites numériques.

Exercice n° 29 :

$u_0 = 0$ $\qquad$ $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 2}{u_n + 3}$.



$$u_1 = \frac{2 \times u_0 + 2}{u_0 + 3}$$

$$u_2 = \frac{2 \times u_1 + 2}{u_1 + 3}$$

Or $f(x) = \dfrac{2x + 2}{x + 3}$.

$$f(u_0) = \frac{2 \times u_0 + 2}{u_0 + 3} = u_1$$

Nous pouvons conjecturer que $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1.}$

2) On a $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$

a) Pour prouver que v_n est géométrique, il faut prouver que : $\boxed{v_{n+1} = q\, v_n}$ où q est la raison.

Or $v_n = \boxed{\dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}}$. d'où :

* Or $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 2}{u_n + 3}$.

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{\dfrac{2u_n+2}{u_n+3} - \underbrace{1}_{\frac{u_n+3}{u_n+3}}}{\dfrac{2u_n+2}{u_n+3} + \underbrace{2}_{\frac{2(u_n+3)}{u_n+3}}}$$

$$v_{n+1} = \frac{\dfrac{2u_n+2-(u_n+3)}{u_n+3}}{\dfrac{2u_n+2+2(u_n+3)}{u_n+3}} = \frac{\dfrac{2u_n+2-u_n-3}{u_n+3}}{\dfrac{2u_n+2+2u_n+6}{u_n+3}}$$

$$v_{n+1} = \frac{\dfrac{u_n-1}{u_n+3}}{\dfrac{4u_n+8}{u_n+3}} = \frac{u_n-1}{\cancel{u_n+3}} \times \frac{\cancel{u_n+3}}{4u_n+8} = \frac{u_n-1}{4u_n+8}.$$

$$v_{n+1} = \frac{u_n-1}{4(u_n+2)} = \frac{1}{4} \times \boxed{\frac{u_n-1}{u_n+2}}$$

$$\boxed{v_{n+1} = \frac{1}{4} \times v_n}$$

On en déduit que la suite (v_n) est bien géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

b) Nous savons que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de 1er terme :

$$v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = \frac{0-1}{0+2} = -\frac{1}{2}.$$

Rappel : formule explicite d'une suite géométrique :

$$\boxed{v_n = v_0 \times q^n}$$

D'où $v_n = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

On se souviens que $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$. $(u_n+2) \times v_n = \dfrac{u_n - 1}{\cancel{u_n+2}} \times \cancel{(u_n+2)}$

$$v_n \times (u_n + 2) = u_n - 1.$$

$$v_n u_n + 2 v_n = u_n - 1.$$

$$v_n u_n - u_n = -2 v_n - 1.$$

$$u_n (v_n - 1) = -2 v_n - 1$$

$$u_n = \frac{-2 v_n - 1}{v_n - 1}$$

$v_n = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

$$u_n = \frac{-2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}{-\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}.$$

$$\boxed{u_n = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}{-\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}}.$$

c) (v_n) est une suite géométrique de raison $-1 < \frac{1}{4} < 1$.

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{-1}{-1} = 1$. Résultat cohérent avec la première partie.

Correction du contrôle sur les suites.

Exercice n°1 :

1- Une suite est une application mathématique qui transforme un entier naturel en un unique réel noté u_n. Il existe deux manières de définir une suite : * formule explicite ex $u_n = 2n+3$

* formule | récursive ex $\begin{cases} u_{n+1} = 7 \times u_n + 50. \\ u_0. \end{cases}$
| implicite
| par récurrence

2- Soit $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 + 3n - 5 \\ u_0 = 1 \end{cases}$

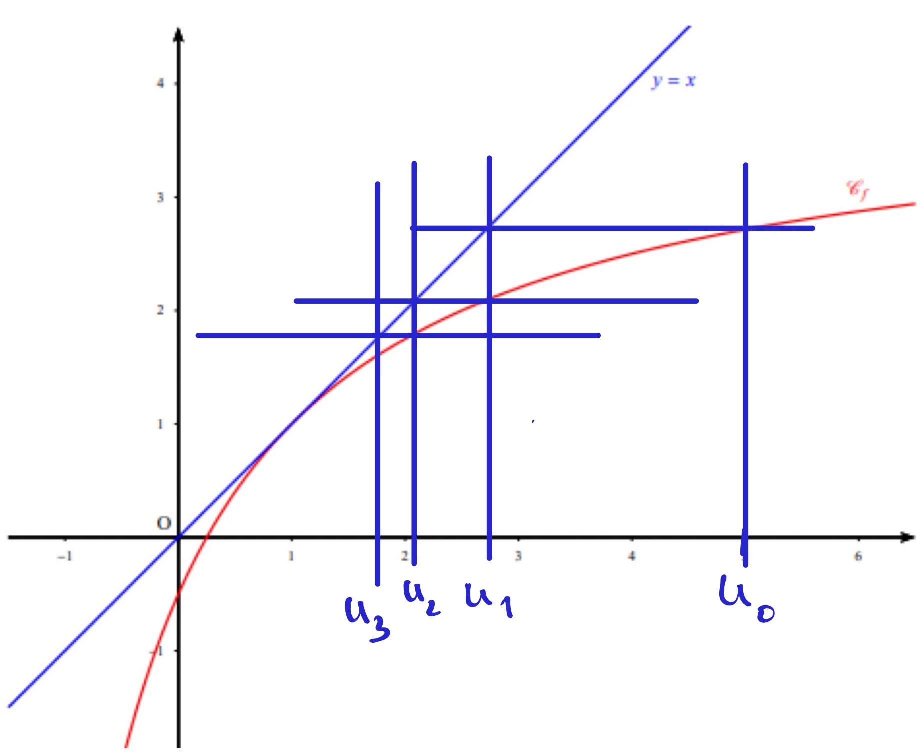
$u_0 = 1$

$u_1 = u_0^2 + 3 \times 0 - 5 = 1^2 + 0 - 5 = -4.$

$u_2 = u_1^2 + 3 \times 1 - 5 = (-4)^2 + 3 - 5 = 16 + 3 - 5 = 14.$

$u_3 = u_2^2 + 3 \times 2 - 5 = 14^2 + 6 - 5 = 196 + 6 - 5 = 197.$

n°2 :



2- $u_0 = 5$ $\qquad u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

$$u_1 = \frac{4\times 5-1}{5+2} = \frac{19}{7}.$$

$$u_2 = \frac{4\times\frac{19}{7}-1}{\frac{19}{7}+2} = \frac{\frac{76}{7}-\frac{7}{7}}{\frac{19+14}{7}} = \frac{\frac{69}{7}}{\frac{33}{7}} = \frac{69}{\cancel{7}}\times\frac{\cancel{7}}{33} = \frac{69}{33}.$$

$$u_2 = \frac{23}{11}.$$

$$\begin{array}{r|l} 69 & 3 \\ \cline{2-2} -6 & 23 \\ \cline{1-1} 09 & \end{array}$$

$$u_3 = \frac{4\times\frac{23}{11}-1}{\frac{23}{11}+2} = \frac{\frac{92}{11}-\frac{11}{11}}{\frac{23}{11}+\frac{22}{11}}$$

$$4\times 23 = 4\times(20+3)$$
$$= 80+12 = 92.$$

$$= \frac{\frac{81}{11}}{\frac{45}{11}} = \frac{81}{\cancel{11}}\times\frac{\cancel{11}}{45} = \frac{81}{45} = \frac{9}{5}.$$

<u>Exercice n°3 :</u> $\quad n\in\mathbb{N} \qquad u_n = \dfrac{2n+3}{n+5}$

1- $$u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)+3}{n+1+5} - \frac{2n+3}{n+5}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$$
$$= \frac{4+3}{12}$$

$$= \frac{2n+2+3}{n+6} - \frac{2n+3}{n+5}$$

$$= \frac{2n+5}{n+6} - \frac{2n+3}{n+5}$$

$$= \frac{(2n+5)(n+5)-(2n+3)(n+6)}{(n+6)\times(n+5)}$$

$$= \frac{2n^2+10n+5n+25-(2n^2+12n+3n+18)}{(n+6)(n+5)}$$

$$= \frac{2n^2+15n+25-(2n^2+15n+18)}{(n+6)(n+5)}$$

$$= \frac{\cancel{2n^2}+\cancel{15n}+25-\cancel{2n^2}-\cancel{15n}-18}{(n+6)(n+5)}$$

$$= \frac{7}{(n+6)(n+5)}$$

On $7>0$ et $n+6>0$ et $n+5>0$ car $n \in \mathbb{N}$.
par produit et quotient, on a :

$u_{n+1}-u_n>0$. Donc la suite (u_n) est croissante.

Exercice n°30 :

1) $\ell_0 = 5 = 5\times\left(\frac{1}{2}\right)^0$ $\quad 2{,}5 = 5\times\left(\frac{1}{2}\right)^1$

$\ell_1 = 5+2{,}5 = 7{,}5.$ $\quad 1{,}25 = 5\times\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\ell_2 = 5+2{,}5+1{,}25 = 8{,}75.$

$\ell_3 = 5+2{,}5+1{,}25+0{,}625 = 9{,}375.$

$\ell_4 = 5+2{,}5+1{,}25+0{,}625+0{,}3125 = 9{,}6875.$

$S_0 = 5\times5 = 25.$

$S_1 = 5\times 5 + 2,5\times 2,5 = 31,25.$

$S_2 = 31,25 + 1,25^2 = 32,8125.$

$S_3 = 32,8125 + 0,625^2 = 33,203125.$

$S_4 = 33,203125 + 0,3125^2 = 33,30078125.$

2) a) $\ell_n = 5 + 5\times\frac{1}{2} + 5\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5\times\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + 5\times\left(\frac{1}{2}\right)^n.$

$$\ell_n = 5 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 5\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}.$$

$$\boxed{\ell_n = 10\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).}$$

$$S_n = 5^2 + \left(5\times\frac{1}{2}\right)^2 + \left(5\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^2 + \left(5\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^2 + \dots + \left(5\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2.$$

$$S_n = \left(5\times\left(\frac{1}{2}\right)^0\right)^2 + 5^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 5^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^6 + \dots + 5^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}.$$

$$S_n = 5^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^0 + 5^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 5^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^6 + \dots + 5^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}.$$

$$S_n = 1^{\text{er}}\text{ terme} \times \frac{1-q^{\text{nbre de termes}}}{1-q}$$

$$S_n = 25\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$S_n = 25\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}}$$

n	u_n	$u_n = 2n.$
1 ⟷	0	$= 2\times 0$
2 ⟷	2	$= 2\times 1$
3 ⟷	4	$= 2\times 2$
5 ⟷	6	$= 2\times 3$
⋮	⋮	
? ⟷	$2n$.	$= 2\times n.$

$$S_n = 25 \times \frac{4}{3} \times \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right).$$

$$S_n = \frac{100}{3} \times \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right).$$