Séance du 23/10/19.

Correction du TD

Arithmétique.

Suite de l'exercice 24.

a) Déjà fait.

b) Déterminer les entiers naturels n tels que $n+1$ divise $3n^2+15n+19$.

On sait que $(n+1)/(n+1)$.

et on veut que $(n+1)/(3n^2+15n+19)$.

donc $\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{Z}^2$ $(n+1) \,/\, \alpha(n+1)+\beta(3n^2+15n+19)$.

Choisissons $\alpha=-3n$ et $\beta=1$. d'où :

$$(n+1) \,/\, -3n(n+1)+1\times(3n^2+15n+19).$$

$$(n+1) \,/\, \cancel{-3n^2}-3n\cancel{+3n^2}+15n+19.$$

$$* \quad (n+1) \,/\, (12n+19)$$

Or $* \quad (n+1) \,/\, (n+1)$

donc $\forall(u;v)\in\mathbb{Z}^2$ $(n+1) \,/\, u\times(12n+19)+v\times(n+1)$.

Pour $u=1$ et $v=-12$.

$$(n+1) \,/\, \cancel{12n}+19 \cancel{-12n}-12.$$

$$(n+1) \,/\, 7.$$

Or les diviseurs de 7 sont : $\{1;7\}$.

$n+1$	1	7
n	0	6

$n\in\{0;6\}$.

c) On veut montrer que $3n^2+15n+19$ n'est jamais divisible par n^2+3n+2.

Par l'absurde, on suppose que $\underset{b}{n^2+3n+2}$ divise $\underset{c}{3n^2+15n+19}$.

Or d'après la question a, $\underset{a}{(n+1)} / (n^2+3n+2)$

Si a/b et $b/c \Rightarrow a/c$.

D'où : $(n+1) / (3n^2+15n+19)$.

Alors $n=0$ ou $n=6$.

Valeurs de n.	0	6
n^2+3n+2	2	56
$3n^2+15n+19$	19	217
n^2+3n+2 divise ? $3n^2+15n+19$	F	F

Ce qui est absurde donc l'hypothèse de départ est fausse.

$3n^2+15n+19$ n'est pas divisible par n^2+3n+2.

n°25 :

Soit $n \in \mathbb{N}$

$5^2 = 25 = 14 + 11$.

$5^2 - 14 = 11 \times 1$.

$11 / (5^2 - 14)$.

* $a/(b-c) \Leftrightarrow b \equiv c\ [a]$.

$5^2 \equiv 14\ [11]$.

$5^{2n} \equiv 14^n\ [11]$.

$a \equiv b\ [n]$. $k \in \mathbb{Z}$.

$a^k \equiv b^k\ [n]$.

$11 / (5^{2n} - 14^n)$

n°26 :

$n^2 \equiv 0^2\ [8]$

Modulo 8, n peut être congru à	0	1	2	3	4	5	6	7
Modulo 8, n^2 peut être congru à	0	1	4	1	0	1	4	1

Finalement n^2 peut être congru à 0, 1 ou 4 modulo 8.

b) Modulo 8, n est congru à	0	1	2	3	4	5	6	7
// n+3 est congru à	3	4	5	6	7	0	1	2
// $(n+3)^2$ //	1	0	1	4	1	0	1	4
// $(n+3)^2-1$ //	0	7	0	3	0	7	0	3

$n \equiv 0\ [8]$ — $\exists k \in \mathbb{Z}$ t.q $n = 8k$.

$n \equiv 2\ [8]$ — $\exists k' \in \mathbb{Z}$ t.q $n = 8k'+2$

$n \equiv 4\ [8]$ — $\exists k'' \in \mathbb{Z}$ t.q $n = 8k''+4$

$n \equiv 6\ [8]$. — $\exists k''' \in \mathbb{Z}$ t.q $n = 8k'''+6$.

n° 28

Déterminer les entiers naturels n t.q $2^n - 1$ est divisible par 9.

$n = 0 \qquad 2^0 - 1 = 0$

$n = 1 \qquad 2^1 - 1 = 1.$

(1) (2) (3) (4) (5)

1 2 4 9 3.

$2 + 9 = 11$

$1 + 4 + 3 = 8$

$n \equiv \_\_\ [8].$

$n = 8 \times q + r. \quad 0 \leq r < 8$

$n - r = 8q.$

$8 \mid (n-r).$

$n \equiv 1\,[8].$