Séance du 16/10/19.

Spé maths, divisibilité, congruences.

## Exercice n° 19.

Démontrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $5^{4k}-1$ est divisible par 13.

$a \equiv b\ [n] \iff n \mid (a-b)$.

$$5^4 = 625 = 13 \times 48 + 1$$

$$625 - 1 = 13 \times 48$$

$$13 \mid (625-1).$$

$$625 \equiv 1\ [13].$$

$$5^4 \equiv 1\ [13]$$

$$5^{4k} \equiv 1^k\ [13]$$

$$\iff 5^{4k} \equiv 1\ [13].$$

$$13 \mid (5^{4k}-1).$$

## N°27.

a) Quels sont les restes possibles de $3^n$ par 11.

b) En déduire les entiers $n$ pour lesquels $3^n+7$ est divisible par 11.

a)

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3^n$ | 1 | 3 | 9 | 27 | 81 | 243 | 729 | 2187 |
| Reste de $3^n$ par 11 | 1 | 3 | 9 | 5 | 4 | 1 | 3 | 9 |

Si $n = 5p$

$$3 \equiv 3 \ [11].$$

$$3^5 \equiv 1 \ [11].$$

$$3^{5p} \equiv 1 \ [11].$$

$$3^n \equiv 1 \ [11].$$

$n = 5p+1.$

$$3^{5p} \equiv 1 \ [11].$$

$3^{5p+1} \equiv \underline{?} \ [11].$

$$3^1 \equiv 3 \ [11]$$

$$3^{5p+1} \equiv 3 \ [11].$$

$$3^n \equiv 3 \ [11].$$

$n = 5p+3$

$3^{5p+3} \equiv \underline{?} \ [11].$ $\qquad 3^{5p} \equiv 1 \ [11].$

$$3^3 = 27 \equiv 5 \ [11]$$

$$3^{5p+3} \equiv 5 \ [11].$$

Les restes possibles dans la division euclidienne de $3^n$ par 11 sont : $\{1; 3; 9; 5; 4\}.$

b) Si $n = 5p$ $\qquad 3^n \equiv 1 \ [11].$

$3^n+7 \equiv 8\,[11]$. $\times$ impossible.

Si $n=5p+1$, $3^n \equiv 3\,[11]$.

$3^n+7 \equiv 10\,[11]$. $\times$ impossible.

Si $n=5p+2$ $3^n \equiv 9\,[11]$.

$3^n+7 \equiv 16\,[11]$.

$3^n+7 \equiv 5\,[11]$. $\times$ impossible.

Si $n=5p+3$, $3^n \equiv 5\,[11]$.

$3^n+7 \equiv 12\,[11]$

$3^n+7 \equiv 1\,[11]$. $\times$. impossible.

Si $n=5p+4$ $3^n \equiv 4\,[11]$.

$3^n+7 \equiv 11\,[11]$.

$3^n+7 \equiv 0\,[11]$. Oui.

Si $n$ est sous la forme $n=5p+4$ où $p \in \mathbb{Z}$.

alors $3^n+7$ est divisible par 11.

Ex: Si $p=1$, $5p+4=9$. $3^9=19683$

$3^9+7=19690=1790\times 11$.

n°24.

$$
\begin{array}{l|l}
n^2 + 5n + 4 & n + 1 \\
\hline
-\,(n^2 + n) & n + 4 \\
0 \quad 4n + 4 & \\
\quad -\,(4n + 4) & \\
\quad\quad 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
182 & 3 \\
\hline
 & 6
\end{array}
$$

$n^2 + 5n + 4 = (n+1) \times (n+4)$.

$\downarrow$

$n^2 + 4n + n + 4$

$$
\begin{array}{l|l}
n^2 + 3n + 2 & n + 1 \\
\hline
-\,(n^2 + n) & n + 2 \\
0 \quad 2n + 2 & \\
\quad -\,(2n + 2) & \\
\quad\quad 0 &
\end{array}
$$

$n^2 + 3n + 2 = (n+1) \times (n+2)$.

$2x \equiv 4 \ [12]$.

$12 \mid (2x - 4)$

$2x - 4 = 12k$.

$\underline{\underline{x - 2 = 6k}}$.