

# TS: Conjecture d'un DM de Spé-Maths.

n°2:

1) Tableau de congruence:  $\forall n \in \mathbb{N}$

Modulo 2, $n$ est congru à	0	1
Modulo 2, $n^5$ est congru à	0	1.
Modulo 2, $n^5 - n$ est congru à	0	0

}

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n^5 - n \equiv 0 [2]$ .  
donc  $A_n$  est pair.

2) Modulo 3,  $n$  est congru à

0	1	2	
Modulo 3, $n^3$ est congru à	0	1	2.
Modulo 3, $n^3 - n$ est congru à	0	0	0

}

donc  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  
 $n^3 - n \equiv 0 [3]$ .  
donc  $A_n$  est divisible par 3.

3) Modulo 5,  $n$  est congru à

0	1	2	3	4	5	
Modulo 5, $n^5$ est congru à	0	1	2	3	4	5
Modulo 5, $n^5 - n$ est congru à	0	0	0	0	0	0

}

$\forall n \in \mathbb{N}$   
 $n^5 - n \equiv 0 [5]$ .  
donc  $5 / A_n$ .

4)  $A_n$  est divisible par 2; 3 et 5 donc  $\exists k \in \mathbb{Z} \text{ t. } q:$

$$A_n = 2 \times 3 \times 5 \times k.$$

$$A_n = 30k \quad \text{donc } 30 / A_n.$$

n°3:

1)  $a=2$  prenons  $n=3$ , on a  $2^3 = 8 \equiv 1 [7]$ .

$a=3$  prenons  $n=6$ , on a  $3^6 = 729 \equiv 1 [7]$ .

2)  $a=4$  prenons  $n=6$ , on a  $4^6 = 4096 \equiv 1 [7]$ .

$a=5$  prenons  $n=6$ , on a  $5^6 = 15625 \equiv 1 [7]$ .

$a=6$  prenons  $n=6$ , on a  $6^6 = 46656 \equiv 1 [7]$ .

$$2^3 \equiv 1 [7].$$

$$(2^3)^{68} \equiv 1 [7].$$

$$2^{2004} \equiv 1 [7].$$

Or

$$2^2 \equiv 4 [7].$$

Par produit:

$$2^{2006} \equiv 4 [7]. \quad (1)$$

$$3^6 \equiv 1 [7].$$

$$(3^6)^{334} \equiv 1 [7].$$

$$3^{2004} \equiv 1 [7].$$

Or

$$3^2 \equiv 2 [7].$$

Par produit,

$$3^{2006} \equiv 2 [7]. \quad (2)$$

$$4^6 \equiv 1 [7].$$

$$(4^6)^{334} \equiv 1 [7].$$

$$4^{2004} \equiv 1 [7].$$

$$4^2 \equiv 2 [7].$$

Par produit  $4^{2006} \equiv 2 [7]. \quad (3)$

$$5^6 \equiv 1 [7].$$

$$(5^6)^{334} \equiv 1 [7].$$

$$5^2 \equiv 4 [7].$$

Par produit,  $5^{2006} \equiv 4 [7]. \quad (4)$

$$6^6 \equiv 1 [7].$$

$$(6^6)^{334} \equiv 1 [7].$$

$$6^{2004} \equiv 1 [7].$$

$$6^2 \equiv 1 [7].$$

$6^{2006} \equiv 1 [7]. \quad (5)$

En additionnant (1), (2), (3), (4), (5), on a:

$$2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006} + 5^{2006} + 6^{2006} \equiv 13 [7].$$

$\Leftrightarrow$

$$\boxed{A_{2006} \equiv 6 [7].}$$

