Séance du 27/10/19.

Limites et continuité

On dit que f est continue en a ssi :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

<u>Exemple :</u> $\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \\ u_0 = 0. \end{cases}$ Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.

Initialisation : $u_0 = 0$.

$$u_1 = \sqrt{3u_0 + 4}$$

$$u_1 = \sqrt{3 \times 0 + 4} = \sqrt{4} = 2$$

Donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 4$. Ainsi la proposition est initialisée.

<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.

montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$.

Or par hypothèse de récurrence, on a :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4.$$

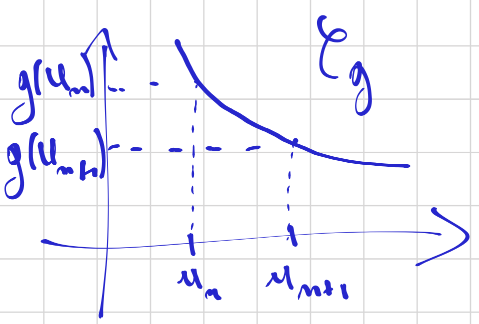
$\times 3$

$$0 \leq 3u_n \leq 3u_{n+1} \leq 12$$

$+4$

$$4 \leq 3u_n + 4 \leq 3u_{n+1} + 4 \leq 16.$$

On applique la f° racine carrée croissante sur $[0 ; +\infty[$.



$$0 \leq 2 \leq \sqrt{3u_n + 4} \leq \sqrt{3u_{n+1} + 4} \leq 4.$$

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4.$$

Donc la proposition est héréditaire

CCl : La proposition étant initialisée et héréditaire, elle est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.

donc (u_n) est croissante et majorée par 4 donc convergente vers une limite $l \in [0;4]$.

2) On sait $f(x) = \sqrt{3x+4}$ et f est continue sur $D_f = [-\frac{4}{3}; +\infty[$

$3x+4 \geq 0$ donc f est continue sur $[0;4]$.

$x \geq -\frac{4}{3}$ donc en particulier en l.

Donc d'après le théorème du point fixe, l est sol° de l'éq° :

$$f(x) = x.$$

$$\sqrt{3x+4} = x.$$

$$3x+4 = x^2$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4)$$

$$\Delta = 25 > 0.$$

Donc l'éq° admet 2 sol° réelles :

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{25}}{2} = -1.$$

$$x_2 = \frac{3 + \sqrt{25}}{2} = 4.$$

Or $l = -1$ est impossible

car $l \in [0;4]$ donc $l = 4$.

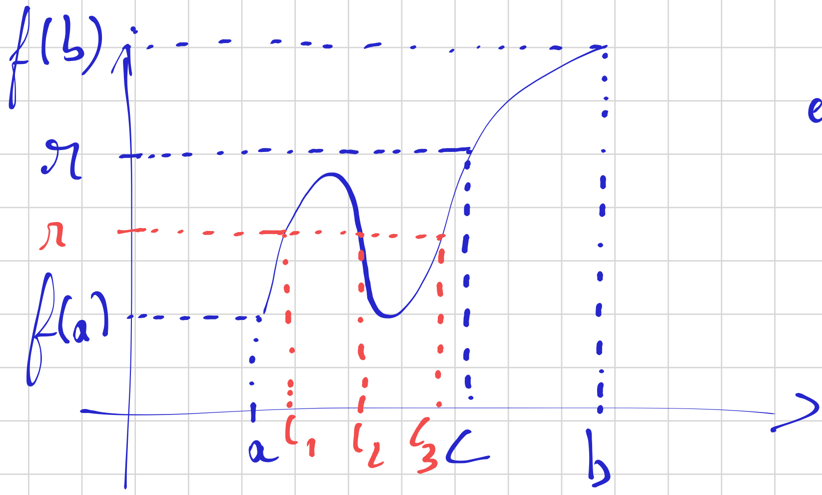
<u>TVI :</u> Soit f une f° continue sur I. Soit $a \in I$ et $b \in I$.

$a \leq b$.

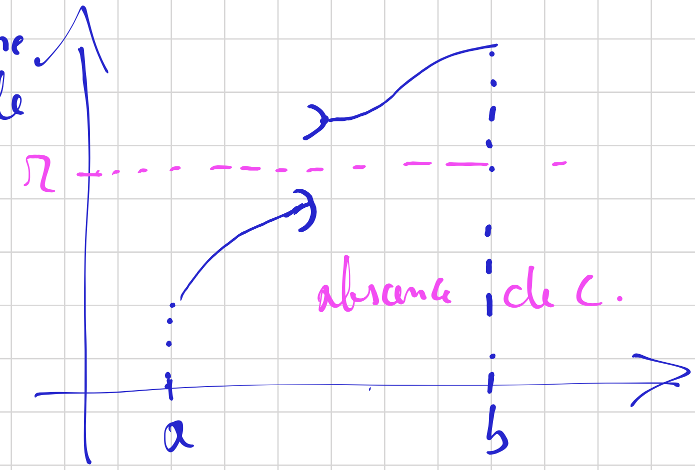
] [

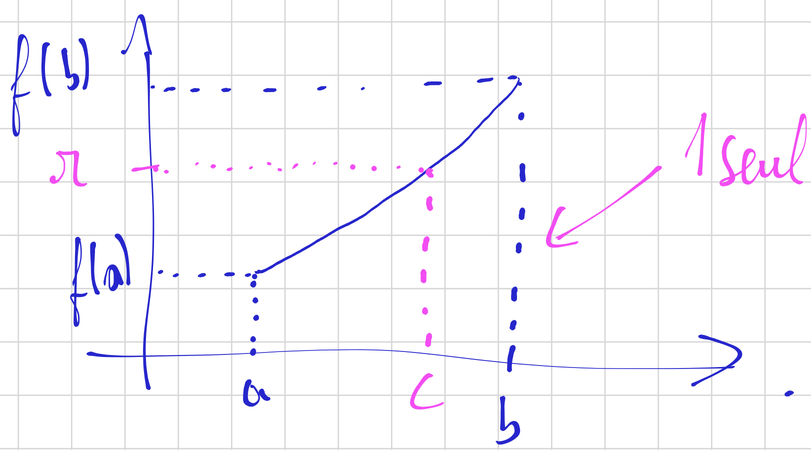
) (

Exemple.



Contre exemple





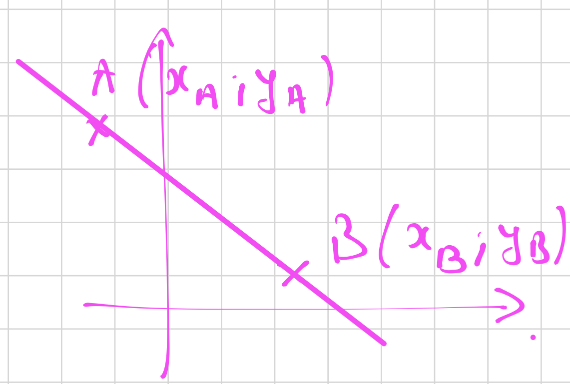
1 seul c. car f est st croissante.

TD sur la continuité:

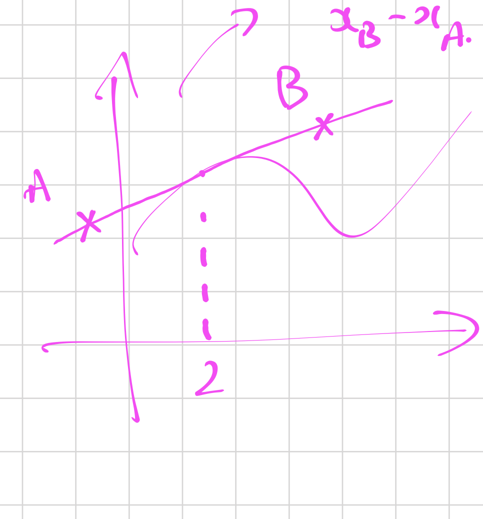
Exercice 1:

a) $f(0) = 2$ $\quad f(-1) = 1$ $\quad f(2) = -1.$

b) $f'(0) = 0$ $\quad f'(-1) = 2$ $\quad f'(2) = -\frac{1}{2}.$



$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$

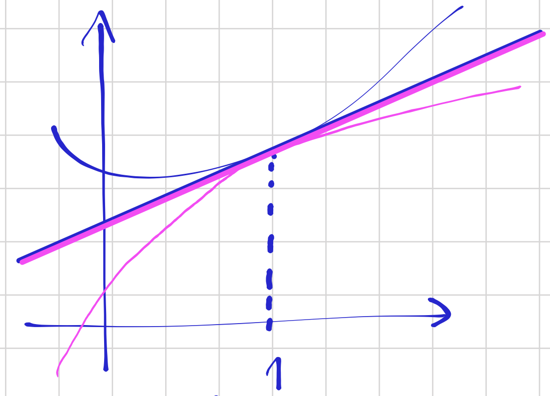


$f'(2)$?

Exercice n°3 :

$$y_1 = \sqrt{x^2 - x + 1}$$

$$y_2 = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4}.$$

1) 

Les deux courbes semblent avoir la même tangente en 1.

2) $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$.

$f(x) = \sqrt{u(x)}$

$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

$$f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}$$

$$f'(1) = \frac{2 \times 1 - 1}{2\sqrt{1^2 - 1 + 1}} = \frac{1}{2 \times \sqrt{1}} = \frac{1}{2}.$$

$g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4}$.

$g'(x) = -\frac{1}{4} \times 2x + 1$

$g'(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.

$g'(1) = -\frac{1}{2} \times 1 + 1 = -\frac{1}{2} + 1$

$= \frac{1}{2}$.

Conjecture vérifiée car $g'(1) = f'(1) = \frac{1}{2}$.

Exercice 5 :

1) a) Soit $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

$u'(x) = 6x^2 - 6x$.

$u'(x) = 6x(x - 1)$.

$u'(x) = 0 \iff 6x = 0$ ou $x - 1 = 0$.

$x = 0$ ou $x = 1$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$6x$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	

$$\lim_{x \to -\infty} 2x^3 - 3x^2 - 1 = \lim_{x \to -\infty} 2x^3 = -\infty$$

$u'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Var° de u	$-\infty \nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} 2x^3-3x^2-1 = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty.$$

$u(0) = 2\times0^3 - 3\times0^2 - 1 = -1.$

$u(1) = 2\times1^3 - 3\times1^2 - 1 = 2-3-1 = 2-4 = -2.$

b) Sur $]-\infty;1]$, le maximum de u est -1, l'éq° $u(x)=0$ n'admet aucune sol° sur $]-\infty;1]$.

En revanche, u est continue sur $[1;+\infty[$

u est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

$u(1) = -2$ et $\lim_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$.

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'éq° $u(x)=0$ admet une unique sol° sur $[1;+\infty[$. donc sur $\mathbb{R}$.

Or $u(1) = -2$ et $u(2) = 2\times2^3 - 3\times2^2 - 1$

$= 16 - 12 - 1$

$u(2) = 16 - 13 = 3.$

donc $1 \leq \alpha \leq 2$.

c) D'après la calculatrice :

$1{,}677 \leq \alpha \leq 1{,}678.$