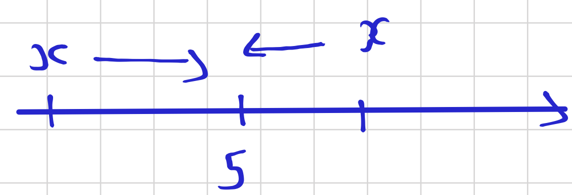
Séance du 19/10/19. $\boxed{\text{Limites et continuité}}$

N°4 p1.

1) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+3}{x-5}}$ en $x = 5$. $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$

Ici $x > 5$ car $x - 5 > 0$
$\iff x > 5$.



$\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x > 5}} x + 3 = \lim\limits_{x \to 5^+} x + 3 = 8$. $\lim\limits_{x \to 5^+} x - 5 = 0$

On se demande alors si $\lim\limits_{x \to 5^+} x - 5 = 0^+$ ou 0^-.

x	$-\infty$		$5 \leftarrow x$		$+\infty$
$x-5$		$-$	0	$+$	

Donc $\lim\limits_{x \to 5^+} x - 5 = 0^+$.

Par quotient des limites,
$\lim\limits_{x \to 5^+} \dfrac{x+3}{x-5} = +\infty$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Par composition de limites $\lim\limits_{x \to 5} \sqrt{\dfrac{x+3}{x-5}} = +\infty$.

2) $f(x) = \sqrt{-x^3 + x^2 + x}$ en $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} -x^3 + x^2 + x = \lim\limits_{x \to -\infty} -x^3 = +\infty$ Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

Par composition de limites, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Polynôme : $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n$.

3) $f(x) = \sqrt{\dfrac{-x+1}{x^2+1}}$ en $-\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-x+1}{x^2+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-\cancel{x}}{\cancel{x} \times x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{x}.$$
$$= 0$$

Or $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$ donc par composition de limites,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$

5) $f(x) = \cos\left(\dfrac{\pi x+1}{x+2}\right)$ en $+\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi x+1}{x+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\pi \cancel{x}}{\cancel{x}} = \pi.$$

Or $\lim_{x \to \pi} \cos(x) = -1$

n° 5. $x \in]-5; +\infty[$ $f(x) = \dfrac{x-3}{x+5}$.

1) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x} = 1.$

On cherche $\lim_{x \to +\infty} (f \circ f)(x) = \lim_{x \to +\infty} f(f(x))$ Or $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1.$

Par composition de limites, $\lim_{x \to +\infty} f(f(x)) = f(1)$

$$f(1)=\frac{1-3}{1+5}=\frac{-2}{6}=-\frac{1}{3}.$$

2)

$$f(x)=x^2.$$
$$f(f(x))=(f(x))^2$$
$$=(x^2)^2=x^4.$$

$$f(2)=2^2 \qquad f(abc)=(abc)^2$$
$$f(3)=3^2 \qquad f(\phi)=\phi^2$$

$$f(x)=\frac{x-3}{x+5}$$

$$f(f(x))=\frac{f(x)-3}{f(x)+5}=\frac{\frac{x-3}{x+5}-3}{\frac{x-3}{x+5}+5}=\frac{\frac{x-3}{x+5}-\frac{3(x+5)}{x+5}}{\frac{x-3}{x+5}+\frac{5(x+5)}{x+5}}.$$

$$=\frac{\frac{x-3-3x-15}{x+5}}{\frac{x-3+5x+25}{x+5}}=\frac{\frac{-2x-18}{x+5}}{\frac{6x+22}{x+5}}$$

$$f(f(x))=\frac{-2x-18}{\cancel{x+5}}\times\frac{\cancel{x+5}}{6x+22}=\frac{-2x-18}{6x+22}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2\cancel{x}}{6\cancel{x}}=-\frac{2}{6}=\boxed{-\frac{1}{3}}.$

no 6.

1) $f(x)=\sqrt{x^2+1}+x$ en $-\infty$.

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)\times(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{\sqrt{x^2+1}^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}.$$

Or $\lim_{x \to -\infty} x^2+1 = +\infty$. et $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

donc par composition de limites:

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty.$$

De plus, $\lim_{x \to -\infty} -x = +\infty$

Par somme de limites:

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+1} - x = +\infty.$$

Par quotient de limites, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$.

Indication. $a = \sqrt{a} \times \sqrt{a}$

$= \sqrt{a}^2 = a$.

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1^2}}{x-1} = \frac{\sqrt{(x-1)(x+1)}}{\sqrt{x-1} \times \sqrt{x-1}}$$

$$f(x) = \frac{\cancel{\sqrt{x-1}} \times \sqrt{x+1}}{\cancel{\sqrt{x-1}} \times \sqrt{x-1}}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

$x^2 - 3 = x^2 - \sqrt{3}^2$

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

* $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x} = 1$.

Or $\lim_{x \to 1} \sqrt{x} = 1$. Par composition de limites, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

* $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = 1$. Par composition, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$.

* $\lim_{x \to 1} x+1 = 2$ $\qquad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} x-1 = 0^+$. Par quotient

$$\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty.$$

n°9

2) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1. \qquad \times(-1)$$

$$1 \geq -\cos(x) \geq -1. \qquad +2$$

$$3 \geq 2-\cos(x) \geq 1.$$

On applique la fonction inverse décroissante sur $]0;+\infty[$

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2-\cos(x)} \leq 1 \qquad \times(x+1) \geq 0$$

car $x \to +\infty$.

$$\frac{x+1}{3} \leq \frac{x+1}{2-\cos(x)} \leq x+1.$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+1}{3} = +\infty$. Par comparaison de limites,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{2-\cos(x)} = +\infty.$$