CHAPITRE : Calcul littéral - Identités remarquables

I- Développement.

Définition : Développer une expression algébrique c'est la transformer en une somme (ou différence) algébrique.

1) Le distributivité simple.

Rappels : *a, b et k* désignent 3 nombres relatifs.

$$k(a + b) = ka + kb$$

$$k(a - b) = ka - kb$$

Exemples :

$A = 6(x - 4)$ $A = 6x - 24$	$B = 11(8 - 4x)$ $B = 88 - 44x$ $B = -44x + 88$	$C = -4(2x - 5)$ $C = -8x + 20$	$D = -2(-5 - 3x)$ $D = 10 + 6x$ $D = 6x + 10$

2) Double distributivité.

Rappel : *a, b, c et d* désignent 4 nombres relatifs.

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Exemples :

$A = (x + 2)(3x - 3)$ $A = 3x^2 - 3x + 6x - 6$ $A = 3x^2 + 3x - 6$	$B = (7x - 5)(2x - 8)$ $B = 14x^2 - 56x - 10x + 40$ $B = 14x^2 - 66x + 40$
$C = -3(7 + 2x)(5x - 8)$ $C = -3(35x - 56 + 10x^2 - 16x)$ $C = -3(10x^2 + 19x - 56)$ $C = -30x^2 - 57x + 178$	$D = (9x - 3)(-7x - 5)$ $D = -63x^2 - 45x + 21x + 15$ $D = -63x^2 - 24x + 15$

3) Identités remarquables.

Quels que soient les nombres a et b :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Démonstration : on utilise la double distributivité

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = aa - ab - ba + bb = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)(a - b) = aa - ab + ba - bb = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$

Applications :

a) Développer :

$A = (x + 5)^2$ $A = x^2 + 2\times x\times 5 + 5^2$ $A = x^2 + 10x + 25$	$B = (3x + 7)^2$ $B = (3x)^2 + 2\times 3x\times 7 + 7^2$ $B = 9x^2 + 42x + 49$	$C = (4x - 8)^2$ $C = (4x)^2 - 2\times 4x\times 8 + 8^2$ $C = 16x^2 - 64x + 64$
$D = (9x - 3)^2$ $D = (9x)^2 - 2\times 9x\times 3 + 3^2$ $D = 81x^2 - 54x + 9$	$E = (7x + 8)(7x - 8)$ $E = (7x)^2 - 8^2$ $E = 49x^2 - 64$	$F = (2 + 4x)(4x - 2)$ $F = (4x + 2)(4x - 2)$ $F = (4x)^2 - 2^2$ $F = 16x^2 - 4$

b) Calculer, sans calculatrice, les expressions suivantes.

$A = 101^2$ $A = (100 + 1)^2$ $A = 100^2 + 2\times 100\times 1 + 1^2$ $A = 10\,000 + 200 + 1$ $A = 10\,201$	$B = 1005^2$ $B = (1000 + 5)^2$ $B = 1000^2 + 2\times 1000\times 5 + 5^2$ $B = 1\,000\,000 + 10\,000 + 25$ $B = 1\,010\,025$	$C = 97^2$ $C = (100 - 3)^2$ $C = 100^2 - 2\times 100\times 3 + 3^2$ $C = 10\,000 - 600 + 9$ $C = 9\,409$
$D = 990^2$ $D = (1000 - 10)^2$ $D = 1000^2 - 2\times 1000\times 10 + 10^2$ $D = 1\,000\,000 - 20\,000 + 100$ $D = 980\,100$	$E = 102\times 98$ $E = (100 + 2)(100 - 2)$ $E = 100^2 - 2^2$ $E = 10\,000 - 4$ $E = 9\,996$	$F = 293\times 307$ $F = (300 - 7)(300 + 7)$ $F = 300^2 - 7^2$ $F = 90\,000 - 49$ $F = 89\,951$

c) On considère l'expression : $A = (x - 3)^2 - (x - 1)(x - 2)$

α) Développer et réduire A.

$A = (x - 3)^2 - (x - 1)(x - 2)$

$A = x^2 - 2\times x\times 3 + 3^2 - (x^2 - 2x - x + 2)$

$A = x^2 - 6x + 9 - (x^2 - 3x + 2)$

$A = x^2 - 6x + 9 - x^2 + 3x - 2$

$\underline{A = -3x + 7}$

β) Comment peut-on déduire, sans calculatrice, le résultat de $99997^2 - 99999 \times 99998$?

En posant $x = 100\,000$, on a : $A = (100\,000 - 3)^2 - (100\,000 - 1)(100\,000 - 2) = 99997^2 - 99999\times 99998$

Or, l'expression A est égale à $-3x + 7$ donc :

$$99997^2 - 99999\times 99998 = -3\times 100\,000 + 7 = -300\,000 + 7 = -299\,993$$

II- Factorisation.

Factoriser une expression algébrique c'est la transformer en un produit de somme

(et ou différence) algébrique.

1) Par recherche d'un facteur commun.

Rappels : *k*, *a et b* désignent 3 nombres relatifs.

$$ka + kb = k(a + b)$$

$$ka - kb = k(a - b)$$

k est le facteur commun

Applications :

Factoriser :

$A = 6x - 18$ $A = 6\times x - 6\times 3$ $A = 6(x - 3)$	$B = 15 - 6x$ $B = 5\times 3 - 3\times 2x$ $B = 3(5 - 2x)$	$C = x^2 - 8x$ $C = x\times x - 8\times x$ $C = x(x - 8)$	$D = 4x^2 - 10x$ $D = 2x\times 2x - 2x\times 5$ $D = 2x(2x - 5)$

$E = (2x + 3)(5x - 7) - (2x + 3)(x - 2)$ $E = (2x + 3)[(5x - 7) - (x - 2)]$ $E = (2x + 3)(5x - 7 - x + 2)$ $E = (2x + 3)(4x - 5)$	$F = 7(x - 5) - (x - 5)(10 - 2x)$ $F = (x - 5)[7 - (10 - 2x)]$ $F = (x - 5)(7 - 10 + 2x)$ $F = (x - 5)(2x - 3)$

$G = (2x - 3)^2 + (2x - 3)(x + 1)$ $G = (2x - 3)(2x - 3) + (2x - 3)(x + 1)$ $G = (2x - 3)[(2x - 3) + (x + 1)]$ $G = (2x - 3)(2x - 3 + x + 1)$ $G = (2x - 3)(3x - 2)$	$H = (5 - x)(x + 2) - 3(5 - x)^2$ $H = (5 - x)[(x + 2) - 3(5 - x)]$ $H = (5 - x)(x + 2 - 15 + 3x)$ $H = (5 - x)(4x - 13)$

2) En utilisant une identité remarquable.

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Factoriser :

$A = x^2 + 6x + 9$ $A = x^2 + 2\times x\times 3 + 3^2$ $A = (x + 3)^2$	$B = 9x^2 + 30x + 25$ $B = (3x)^2 + 2\times(3x)\times 5 + 5^2$ $B = (3x + 5)^2$	$C = 36x^2 - 96x + 64$ $C = (6x)^2 - 2\times(6x)\times 8 + 8^2$ $C = (6x - 8)^2$
$D = 16 + 49x^2 - 56x$ $D = 49x^2 - 56x + 16$ $D = (7x)^2 - 2\times(7x)\times 4 + 4^2$ $D = (7x - 4)^2$	$E = 4x^2 - 25$ $E = (2x)^2 - 5^2$ $E = (2x - 5)(2x + 5)$	$F = 144 - 81x^2$ $F = 12^2 - (9x)^2$ $F = (12 - 9x)(12 + 9x)$
$G = (x - 1)^2 - 36$ $G = (x - 1)^2 - 6^2$ $G = [(x - 1) - 6][(x - 1) + 6]$ $G = (x - 1 - 6)(x - 1 + 6)$ $G = (x - 7)(x + 5)$	$H = 25 - (2x + 4)^2$ $H = 5^2 - (2x + 4)^2$ $H = [5 - (2x + 4)][5 + (2x + 4)]$ $H = (5 - 2x - 4)(5 + 2x + 4)$ $H = (-2x + 1)(2x + 9)$	$I = (7x - 3)^2 - (3x + 7)^2$ $I = [(7x - 3) - (3x + 7)][(7x - 3) + (3x + 7)]$ $I = (7x - 3 - 3x - 7)(7x - 3 + 3x + 7)$ $I = (4x - 10)(10x + 4)$

$J = 18x^2 - 50$ $J = 2(9x^2 - 25)$ $J = 2[(3x)^2 - 5^2)]$ $J = 2(3x - 5)(3x + 5)$	$K = 16x^2 - 64 - (4x - 8)(2x - 15)$ $K = (4x)^2 - 8^2 - (4x - 8)(2x - 15)$ $K = (4x - 8)(4x + 8) - (4x - 8)(2x - 15)$ $K = (4x - 8)[(4x + 8) - (2x - 15)]$ $K = (4x - 8)(4x + 8 - 2x + 15)$ $K = (4x - 8)(2x + 23)$