Séance du 02/10/19.

Correction des exercices d'applicat° du cours.

n°2 :

$\forall n \in \mathbb{N}$ $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

D'une part $3^{n+3} = 3^n \times 3^3$

Or $3^3 = 27 \equiv 5 \ [11] \iff 3^3 \equiv 5 \ [11].$

$3^n \times 3^3 \equiv 5 \times 3^n \ [11].$

$3^{n+3} \equiv 5 \times 3^n \ [11].$

D'autre part : $4^{4n+2} = 4^{4n} \times 4^2 = (4^4)^n \times 4^2$

Or $4^2 = 16 \equiv 5 \ [11].$

$4^4 = 4^2 \times 4^2 = 16 \times 16 = 256 \equiv 3 \ [11].$

$$\begin{array}{r|l} 256 & 11 \\ \hline -22 & 23 \\ 36 & \\ -33 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

$256 = 11 \times 23 + 3.$

$256 - 3 = 11 \times 23.$

$11 \,/\, (256 - 3)$

$256 \equiv 3 \ [11].$

$4^4 \equiv 3 \ [11].$

$(4^4)^n \equiv 3^n \ [11]$

$4^2 \equiv 5 \ [11].$

Par compatibilité avec le produit on a :

$$4^{4n} \times 4^{2} \equiv 5 \times 3^{n} \ [11].$$

$$4^{4n+2} \equiv 5 \times 3^{n} \ [11].$$

Or

$$3^{n+3} \equiv 5 \times 3^{n} \ [11].$$

$a \equiv b \ [c]$.

$b \equiv a \ [c]$.

$$3^{n+3} - 4^{4n+2} \equiv 0 \ [11].$$

donc $11 \mid (3^{n+3} - 4^{4n+2})$.

Exercice n°3 :

1) Soit n cet entier.

$$n = 5q + r \qquad 0 \leq r < 5.$$

Or $q = 3r$. d'où :

$$n = 5 \times 3r + r \quad \text{où} \quad 0 \leq r < 5.$$

$$n = 16r. \quad \text{où} \quad 0 \leq r < 5.$$

r	0	1	2	3	4
n	0	16	32	48	64

$48 = 5 \times 9 + 3$

$64 = 5 \times 12 + 4$

$128 = 5 \times 25 + 3$

2) $(2\times)\begin{cases} a = b \times q + 8 & 0 \leq 8 < b. \\ 2a = b \times q' + 5. & 0 \leq 5 < b. \end{cases}$

$$12 \;\big|\; \frac{5}{2} \qquad 24 \;\big|\; \frac{5}{4}$$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\begin{cases} 2a = 2bq + 16 \\ 2a = bq' + 5. \end{cases}$$

$L_1 - L_2$: $\quad 0 = 2bq + 16 - bq' - 5.$

$$0 = 2bq - bq' + 11.$$

$$-11 = b(2q - q').$$

$$11 = b(q' - 2q).$$

donc $\boxed{b / 11}$ Or $b > 8$.

donc $b = 11.$

n°4 :

1) $(n-3)/(n+5).$ $\qquad a / b$

$(n-3)/(n-3)$ $\qquad a / c$ $\quad \Longrightarrow a / (\alpha b + \beta c).$

$(n-3) / [\alpha(n+5) + \beta (n-3)]$ où $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{Z}^2.$

$\alpha = 1 \qquad \beta = -1.$

$(n-3) / (\cancel{n} + 5 - \cancel{n} + 3)$

$(n-3) / 8.$

$n-3$	1	2	4	8
n	4	5	7	11

$n-3=1.$

$n=1+3.$

$(n-3)/(n+5).$