Séance du 20/11/19. $\boxed{\text{Spé maths.}}$

Egalité de Bézout :

Soit $(a;b) \in \mathbb{Z}^2$. $PGCD(a;b) = D$.

$\Longrightarrow$

$\exists (u;v) \in \mathbb{Z}^2$ t.q: $au + bv = D$.

$PGCD(8;16) = 8$

$(u;v)$ t.q $8 \times u + 16 \times v = 8$.

$(u;v) = (-1;1)$:

$8 \times (-1) + 16 \times 1 = 8$.

Théorème de Bézout :

$\boxed{a \text{ et } b \text{ premiers entre eux} \quad PGCD(a;b) = 1.}$

$\Longleftrightarrow$

$\exists (u;v) \in \mathbb{Z}^2$ t.q $\boxed{au + bv = 1}$

Démonstration : "$\Longrightarrow$" $PGCD(a;b) = 1$. d'après l'égalité de Bézout,

$\exists (u;v) \in \mathbb{Z}^2$ t.q $au + bv = 1$.

"$\Longleftarrow$" $au + bv = 1$.

$PGCD(a;b) = D$

D/a et D/b donc $\forall (\alpha;\beta) \in \mathbb{Z}^2$

$D / \alpha a + \beta b$ pour $(\alpha;\beta) = (u;v)$.

$D / au + bv$

$D / 1$.

donc $D = 1$ donc $PGCD(a;b) = 1$.

Démontrer que deux entiers consécutifs sont toujours premiers entre eux.

$n \in \mathbb{N}$. n ; $n+1$ $PGCD(n;n+1) = 1$

Si $\exists (u;v) \in \mathbb{Z}^2$ t.q $au + bv = 1$.

$PGCD(a;b) = 1$

$u\,n + v(n+1)$ $u = -1$

$\cancel{-n} + \cancel{n} + 1 = 1$. $v = 1$.

Donc $PGCD(n;n+1) = 1$.

Corollaire du théorème de Bézout :

Ex : $\boxed{2x + 4y = 7}$

$$\boxed{ax+by=c \text{ admet des sol° entières}}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\boxed{PGCD(a;b) \mid c}$$

Dém : " $\Rightarrow$ " $ax+by=c$ admet des sol° entières : $(x_0;y_0)$.

$ax_0+by_0=c$.

$PGCD(a;b)=D$ donc D/a et D/b $\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{Z}^2$

$D/\alpha a+\beta b$. $(\alpha;\beta)=(x_0;y_0)$

D/ax_0+by_0.

D/c.

$PGCD(a;b)/c$.

" $\Leftarrow$ " $PGCD(a;b)/c$ $PGCD(a;b)=D$.

D/c

$\exists\ k\in\mathbb{Z}$ t.q $c=Dk$ Or $PGCD(a;b)=D$.

d'après l'égalité de Bézout : $\exists\ (u;v)\in\mathbb{Z}$ t.q :

$au+bv=D$. $)\times k$ $(ax+by=c)$.

$auk+bvk=Dk$

$auk+bvk=c$.

Or $uk\in\mathbb{Z}$ et $vk\in\mathbb{Z}$ on pose $x_0=uk$ $y_0=vk$.

$ax_0+by_0=c$

a / bc et $PGCD(a;b) = 1 \Rightarrow a / c.$

$3 / 7 \times 6 \qquad PGCD(3;7) = 1 \Rightarrow 3/6.$

$4 / 9 \times b \qquad PGCD(4;9) = 1 \qquad 4/b.$

$$\underset{14}{\overset{8}{2x}} + 3\underset{-9}{\overset{-5}{y}} = 1. \qquad (x;y) = (-1;1).$$

$$2x + 3y = 1 = 2\times(-1) + 3\times 1.$$

$$2x + 3y = 2\times(-1) + 3\times 1.$$

$$2x + 2\times 1 = 3\times 1 - 3y.$$

$$2(x+1) = 3(1-y).$$

$$2 \times K = 3(1-y) \qquad 2 / 3(1-y).$$

$$\Rightarrow 2 / (1-y)$$

$\exists\, k \in \mathbb{Z}$ t.q $1 - y = 2k.$

$$\boxed{y = 1 - 2k.}$$

$$2(x+1) = 3(\cancel{1} - \cancel{1} + 2k)$$

$$\cancel{2}(x+1) = 3 \times \cancel{2}k \qquad S = 14 ; -9)$$

$$x + 1 = 3k. \qquad S = (3k-1 ; 1-2k)$$

$$x = 3k - 1 \qquad S = (8 ; -5)$$

$$2(3k-1)+3(1-2k)=$$

$$\cancel{6k}-2+3-\cancel{6k}=1.$$