LOIS DE PROBABILITE DISCRETES

Chapitre 7 | Probabilités conditionnelles

Lois de probabilité discrètes

PROBABILITES CONDITIONNELLES

I. PROBABILITES CONDITIONNELLES

1. Définition

Soient A et B deux événements. Alors la probabilité que A se réalise sachant que B est déjà réalisé vaut :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ où } P(B) \neq 0$$

Remarque

$P_B(A)$ se lit probabilité de A sachant B.

Exemple

On lance un dé non truqué. On considère deux événements suivants :

A : Obtenir un nombre plus grand où égal à 3.

B : Obtenir 4

2. Indépendance

Soient A et B deux événements d'une expérience aléatoire. On dit que A et B sont indépendants si et seulement si :

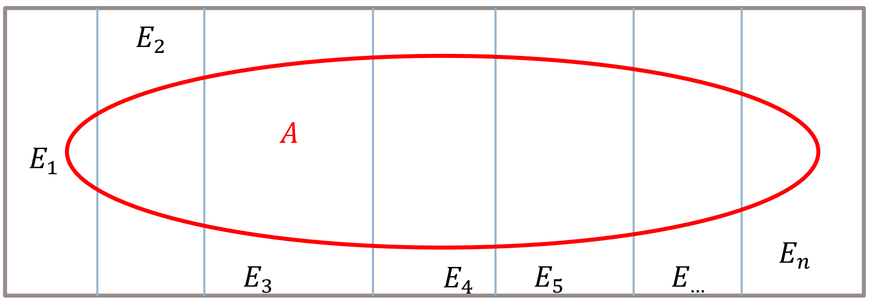
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Preuve

Dans le cas général, on a :

3. Formules des probabilités totales

Soient $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$ des événements qui forment une partition de E où E est l'univers d'une expérience aléatoire. Et soit A un événement de E, alors on a la représentation suivante :



Dans ces conditions, on a :

$$\boldsymbol{P(A) = P(A \cap E_1) + P(A \cap E_1) + P(A \cap E_1) + \cdots + P(A \cap E_n)}$$

Exemple :

II. VARIABLE ALEATOIRE

1. Définition d'une variable aléatoire

Une variable aléatoire, notée X, est une fonction mathématique qui associe à chaque événement élémentaire d'une expérience aléatoire un unique réel.

Exemple

2. Définition d'une loi de probabilité

Donner la loi de probabilité d'une expérience aléatoire consiste à associer à chaque valeur de la variable aléatoire X une unique probabilité.

Une loi de probabilité est en présentée en général de la manière suivante :

$\boldsymbol{x_i}$	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$\boldsymbol{p(X = x_i)}$	$p(X = x_1)$	$p(X = x_2)$	$\dots$	$p(X = x_n)$

Exemple

3. Définition de l'espérance

L'espérance d'une variable aléatoire X est donnée par :

$$E(X) = \sum_{i=0}^{n} P_i \times X_i$$

Exemple

Propriété

L'espérance d'une variable aléatoire composée $Y = aX + B$ vaut :

$$E(Y) = E(aX + b) = a \times E(X) + b$$

Démonstration

4. Variance

La variance d'une variable aléatoire se calcule ainsi :

$$V(X) = \sum_{i=0}^{n} p_i \times \left(X_i - E(X)\right)^2$$

Exemple

Propriété

La variance d'une variable aléatoire composée se calcule ainsi :

$$V(aX + b) = a^2 \times V(X)$$

Démonstration

5. Ecart-type

L'écart-type d'une variable aléatoire se calcule ainsi :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

III. EXERCICE DE BAC TYPIQUE

Partie A

Un ostréiculteur élève deux espèces d'huîtres : « la plate » et « la japonaise ». Chaque année, les huîtres plates représentent 15 % de sa production.
Les huîtres sont dites de calibre n° 3 lorsque leur masse est comprise entre 66 g et 85 g.
Seulement 10 % des huîtres plates sont de calibre n° 3, alors que 80 % des huîtres japonaises le sont.

1) Le service sanitaire prélève une huître au hasard dans la production de l'ostréiculteur.
On suppose que toutes les huitres ont la même chance d'être choisies.
On considère les événements suivants :

- J : « l'huître prélevée est une huître japonaise »,
- C : « l'huître prélevée est de calibre n° 3 ».

a) Construire un arbre pondéré complet traduisant la situation.

b) Calculer la probabilité que l'huître prélevée soit une huître plate de calibre n° 3.

c) Justifier que la probabilité d'obtenir une huître de calibre n° 3 est $0,695$.

d) Le service sanitaire a prélevé une huître de calibre n° 3. Quelle est la probabilité que ce soit une huître plate ?