Taux d'accroissement : $\boxed{\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.}$

Nombre dérivé : $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

↳ coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en a.

Tableau des dérivés des fonctions usuelles.

Ex : $f(x) = ax+b$, $f'(x) = a$.

Tableau des opérations sur les dérivées.

$f(x) = u(x) \times v(x)$, $f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$.

Théorème fondamental : Si $f'(x) \geq 0$, f est croissante.

$f'(x) \leq 0$, f est décroissante.

Exercice 15

Pour les fonctions suivantes, déterminer la fonction dérivée, son signe en précisant l'ensemble pour lequel le calcul est valable. On cherchera à factoriser $f(x)$ lorsque cela est possible. Dresser le tableau de variation de la fonction f

1) $f(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x^2+x+1}$ 2) $f(x) = x\sqrt{x+3}$ 3) $f(x) = \left(\dfrac{x-3}{x-2}\right)^2$

1) $f(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x^2+x+1}$

$u(x) = x^2+x-1$ $v(x) = x^2+x+1.$

$u'(x) = 2x+1$ $v'(x) = 2x+1.$

$$f'(x) = \frac{u'(x)\times v(x) - v'(x)\times u(x)}{(v(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+1)\times(x^2+x+1) - (2x+1)(x^2+x-1)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3+2x^2+2x+x^2+x+1 - (2x^3+2x^2-2x+x^2+x-1)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3+3x^2+3x+1 - (2x^3+3x^2-x-1)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cancel{2x^3}+\cancel{3x^2}+3x+1-\cancel{2x^3}-\cancel{3x^2}+x+1}{(x^2+x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x+2}{(x^2+x+1)^2}$$

On résout $4x+2=0$

$4x=-2$

$x=-\frac{1}{2}$.

On en déduit le tableau de variation de f à l'aide du tableau de signe de $f'(x)$:

Déterminons les valeurs interdites de f:

$$x^2+x+1=0.$$

$$\Delta = b^2-4ac = 1^2-4\times1\times1$$
$$= 1-4 = -3 < 0.$$

Ainsi $x^2+x+1 \neq 0$ donc $D_f = \mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$4x+2$		$-$	0	$+$	
$(x^2+x+1)^2$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$-\frac{5}{3}$	$\nearrow$	

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+1} = \frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1} = \frac{\frac{1}{4}-\frac{2}{4}-\frac{4}{4}}{\frac{1}{4}-\frac{2}{4}+\frac{4}{4}}$$

$$= \frac{-\frac{5}{4}}{\frac{3}{4}} = -\frac{5}{\cancel{4}}\times\frac{\cancel{4}}{3} = -\frac{5}{3}.$$

3) $f(x) = \left(\dfrac{x-3}{x-2}\right)^2$

$(u^n)' = n u' u^{n-1}$.

$u(x) = \dfrac{x-3}{x-2}$.

Rem: $x \neq 2$.

On remarque que $f(x)$ est sous la forme :

$$f(x) = (u(x))^n \quad \text{où} \quad u(x) = \frac{x-3}{x-2} \quad \text{et} \quad n = 2.$$

Dérivons $u(x)$:

$$u'(x) = \frac{1 \times (x-2) - 1 \times (x-3)}{(x-2)^2} = \frac{\cancel{x} - 2 - \cancel{x} + 3}{(x-2)^2}$$

$$u'(x) = \frac{1}{(x-2)^2}.$$

Or on sait que $f'(x) = n\, u'(x)\, (u(x))^{n-1}$.

$$= 2\, \frac{1}{(x-2)^2} \times \left(\frac{x-3}{(x-2)}\right)^1$$

$$= \frac{2(x-3)}{(x-2)^2 \times (x-2)}$$

Etudions le signe de $f'(x)$:

$x - 3 = 0$ $\quad$ $x - 2 = 0$

$x = 3.$ $\quad$ $x = 2.$

$\forall x \in \mathbb{R},\ (x-2)^2 \geq 0$ et $2 > 0$

On en déduit le tableau de signe de la dérivée qui nous permet de trouver les variations de f :

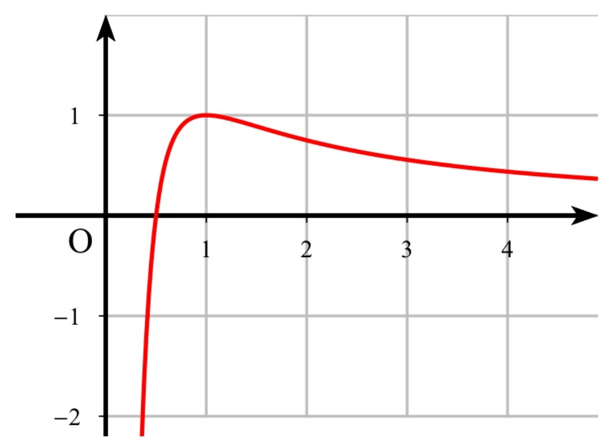
x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$2(x-3)$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x-2)^2$		$+$	0	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$+$	||	$-$	|	$+$	
Var° de f.		↗	||	↘		↗	

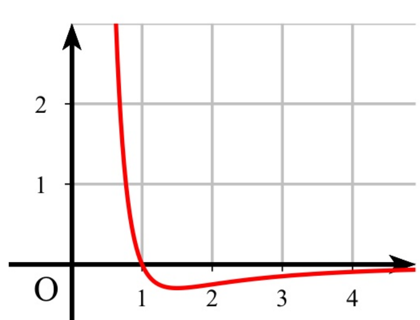
Exercice 16

Reconnaître une courbe

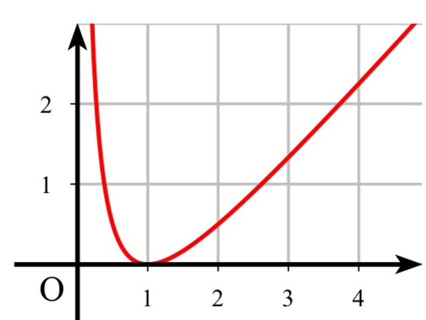
La figure ci-contre est la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f dérivable sur $]0; +\infty[$

Parmi les trois courbes ci-dessous, quelle est celle qui est susceptible de représenter la fonction dérivée f' de f.

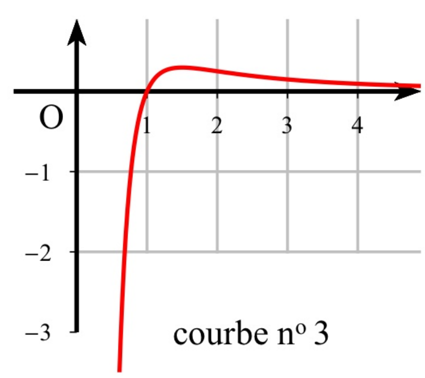




courbe n° 1



courbe n° 2



courbe n° 3

Tableau de signe courbe 2 :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	↗	

FAUX

Tableau de signe courbe 3 :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘		↗	

FAUX

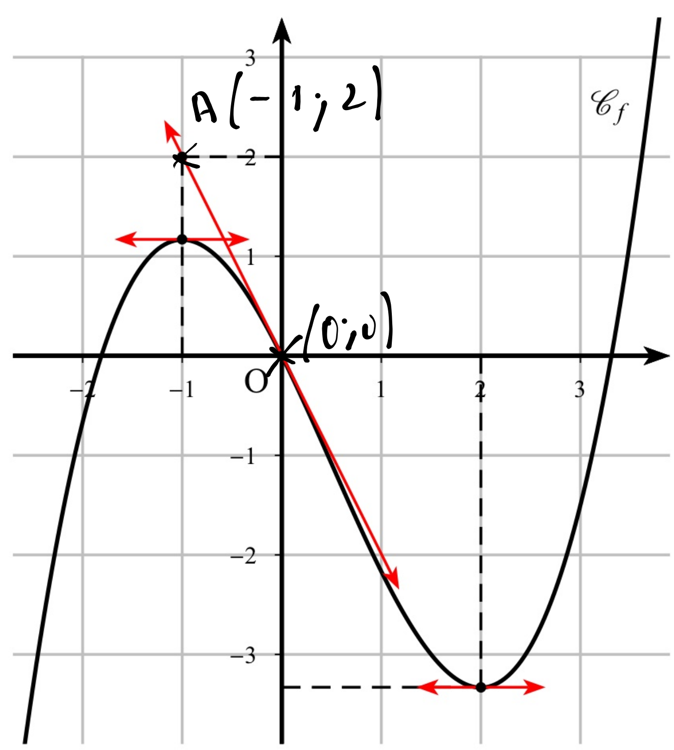
Tableau de signe courbe 1 :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

Exercice 17

Soit une fonction f du 3ᵉ degré définie sur $\mathbb{R}$ dont la représentation $\mathscr{C}_f$ se trouve ci-après.

1) Justifier que la fonction f peut se mettre sous la forme : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
2) D'après la courbe, justifier les égalités suivantes :
   - $f(0) = 0$ et $f'(0) = -2$
   - $f'(-1) = f'(2) = 0$
3) À partir des égalités de la question 2), déterminer les coefficients a, b, c et d.
4) Tracer la fonction f sur votre calculatrice pour vérifier votre solution



2) Le point O(0 ; 0) $\in \mathscr{C}_f$.

donc $f(0) = 0$.

$f'(0) = \dfrac{0-2}{0-(-1)} = \dfrac{-2}{1} = -2$.

En -1 et en -2, la tangente est horizontale donc $f'(-1) = f'(-2) = 0$.

3) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f(0) = 0 \iff a \times 0^3 + b \times 0^2 + c \times 0 + d = 0 \iff d = 0$.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

$$f'(0) = -2 \iff 3a \times 0^2 + 2b \times 0 + c = -2.$$

$$c = -2.$$

$$\begin{cases} f(x) = ax^3 + bx^2 - 2x. \\ f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 2 \end{cases}$$

$$f'(-1) = 0 \iff 3a \times (-1)^2 + 2b \times (-1) - 2 = 0.$$

$$* \ 3a - 2b - 2 = 0.$$

$$f'(2) = 0 \iff 3a \times (2)^2 + 2b \times (2) - 2 = 0.$$

$$* \ 12a + 4b - 2 = 0.$$

$$4 \times \begin{cases} (3a - 2b - 2 = 0) \\ 12a + 4b - 2 = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} 12a - 8b - 8 = 0. \\ 12a + 4b - 2 = 0 \end{cases}$$

$$-8b - (4b) - 8 - (-2) = 0.$$

$$-8b - 4b - 8 + 2 = 0.$$

$$-12b - 6 = 0.$$

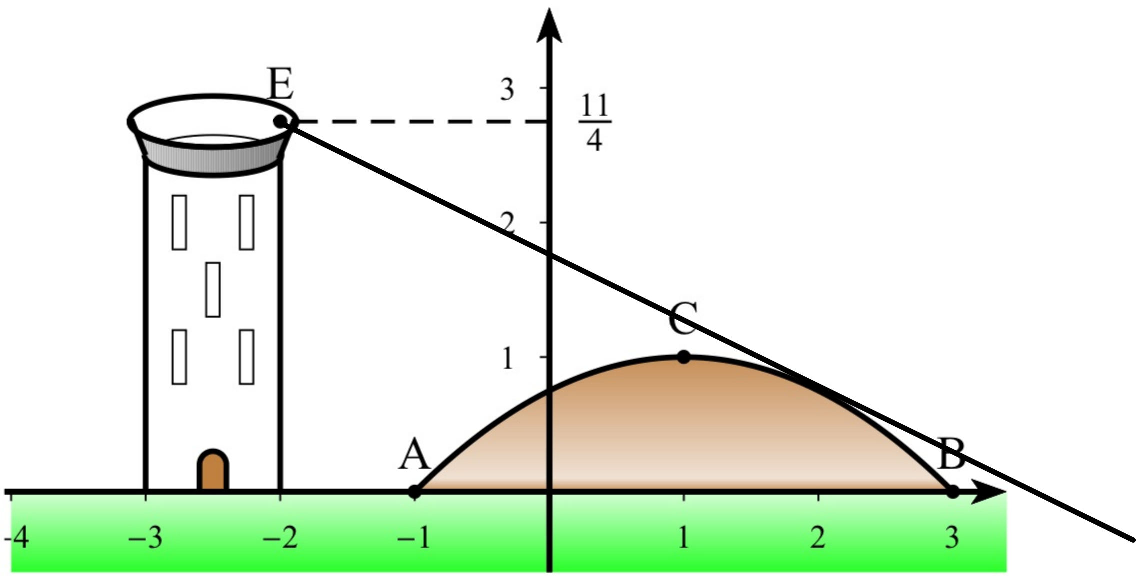
$$b = \frac{6}{-12} = -\frac{1}{2}$$

$$3a - \cancel{2} \times (-\frac{1}{\cancel{2}}) - 2 = 0.$$

$$3a + 1 - 2 = 0.$$

$$a = \frac{1}{3}.$$

$$f(x) = +\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$$



3] par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

C soit la représentation de f.