Séance du 06/11/19.

Correction du contrôle de Spé-Maths

Exercice 1

1) $a / b \iff \exists\, k \in \mathbb{Z}$ t.q $b = ak$. (1)

$a / c \iff \exists\, k' \in \mathbb{Z}$ t.q $c = ak'$ (2)

On multiplie (1) par u : $ub = uak$.

On multiplie (2) par v : $vc = vak'$.

$$bu + cv = uak + vak'$$

$$bu + cv = a\underbrace{(uk + vk')}$$

$bu + cv = aK$. $K \in \mathbb{Z}$

donc $a / (bu + cv)$.

2) On sait que $3 / a^3 + b^3 \iff \exists\, k \in \mathbb{Z}$ t.q : $a^3 + b^3 = 3k$.

Or $(a+b)^3 = (a+b) \times (a+b)^2 = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2)$

$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3$.

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

$= a^3 + b^3 + 3(a^2b + ab^2)$.

$= 3k + 3(a^2b + ab^2)$

$= 3\underbrace{(k + a^2b + ab^2)}_{K \in \mathbb{Z}}$.

$$(a+b)^3 = 3K \quad \text{donc} \quad 3/(a+b)^3.$$

Exercice n°2 :

D'après l'énoncé : (1) $a \equiv 8\ [11]$. et (2) $b \equiv 2\ [11]$.

Par compatibilité avec l'addition :

$$a+b \equiv 8+2\ [11].$$

$$(a+b) \equiv 10\ [11] \quad \text{Or } 10 < 11.$$

Donc le reste de la division euclidienne de $a+b$ par 11 est 10.

Par compatibilité avec la multiplicat°, on a :

$$ab \equiv 16\ [11].$$

$$ab \equiv \boxed{5}\ [11].$$

↳ reste demandé

Comme $5 < 11$,

le reste de ab par 11 est 5.

Par compatibilité avec les puissances, on a :

$$a \equiv 8\ [11].$$

$$a^2 \equiv 64\ [11].$$

$$a^2 \equiv 9\ [11].$$

Le reste de a^2 par 11 est 9.

Exercice n°3 :

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$2^3 \equiv 1\ [7].$$

$$2^{3n} \equiv 1^n\ [7]$$

$$2^{3n} \equiv 1\ [7]. \quad \text{donc } 7/(2^{3n}-1)$$

$a \equiv b\ [c]$

$\iff c/(a-b).$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, on sait que $2^{3n} \equiv 1 [7]$ (1)

$2 \equiv 2 [7]$. (2)

Par produit : $2^{3n} \times 2^1 \equiv 1 \times 2 [7]$

$2^{3n+1} \equiv 2 [7]$ donc $7 / (2^{3n+1} - 2)$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^{3n+1} \equiv 2 [7]$ (3)

Or $2 \equiv 2 [7]$ (4)

Par produit de (3) et (4), on a : $2^{3n+1} \times 2^1 \equiv 4 [7]$.

$2^{3n+2} \equiv 4 [7]$

$\Leftrightarrow 7 / (2^{3n+2} - 4)$.

2) 2^0 * $p = 3k$. D'après la quest° précédente,

2^1 * $p = 3k+1$. si $p = 3k$.

2^2 * $p = 3k+2$ $2^{3k} \equiv \boxed{1} [7]$. ((1)a)).

2^3 Si $p = 3k+1$

2^4 $2^{3k+1} \equiv \boxed{2} [7]$.

$\vdots$ Si $p = 3k+2$

2^p $2^{3k+2} \equiv \boxed{4} [7]$.

Puissances de 2	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
Reste dans la division euclidienne par 7	1	2	4

3) $14\,607 = 3 \times 4869$ donc le reste de $2^{14\,607}$ par 7 est 1. d'après 2).

Exercice 4 :

1) D'une part $5^2 = 25 \equiv 1 \; [24]$.

$$5^2 \equiv 1 \; [24].$$

$$5^{2n} \equiv 1 \; [24]. \quad (1)$$

D'autre part : $-23 \equiv 1 \; [24]$.

$$(-23)^n \equiv 1 \; [24] \quad (2)$$

On soustrait (1) et (2) :

$$5^{2n} - (-23)^n \equiv 0 \; [24].$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $5^{2n} - (-23)^n$ est divisible par 24. VRAI.

2) $a \in \mathbb{Z}$. $a \equiv 0 \; [4]$.

$\Leftrightarrow 4 / a$.

Or $2 / 4$

Par transitivité $2 / (a-0)$

$a \equiv 0 \; [2]$. VRAI.

a / b et b / a.

$a = b$ ou $a = -b$.

$a = 4k$.

$a = 2 \times 2k$.

$2 / a$.

a / b

b / c

$\Rightarrow a / c$.

3) Soit $x = 2$ $2^2 + 2 = 4 + 2 = 6 \equiv 0 \; [6]$.

$2 \not\equiv 0 \; [3]$. FAUX.

4) $n \in \mathbb{N}$. A est entier $A = k \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{4n-1}{n+1} = k.$$

$$4n - 1 = k \times (n+1)$$

donc $(n+1) / (4n-1)$

Or $(n+1) / (n+1)$

D'après le théorème de la combinaison linéaire :

$$\forall (\alpha;\beta) \in \mathbb{Z}^2, \quad (n+1) \mid \alpha(4n-1) + \beta(n+1)$$

$\alpha = 1$ et $\beta = -4$, on a :

$$(n+1) \mid (\cancel{4n} - 1 - \cancel{4n} - 4)$$

$$(n+1) \mid -5$$

$n+1$	-5	5	1	-1
n	-6	4	0	-2

Il existe bien 2 valeurs de $n \in \mathbb{N}$ $(4;0)$ pour lesquelles $A \in \mathbb{Z}$.