Séance du 13/11/19.

$\boxed{\text{Spé Maths.}}$

$a/b \boxed{\Longleftrightarrow} \exists k \in \mathbb{Z}$ t.q $b = ak$.

a/b et a/c $\boxed{\Longrightarrow}$ $\exists (\alpha;\beta) \in \mathbb{Z}^2$
t.q $a/(\alpha b + \beta c)$.

il existe un unique

Division euclidienne de a par b, $\exists! (q;r) \in \mathbb{Z}^2$

$a = bq + r$ t.q $0 \leq r < b$.

34	21
$\downarrow$	$\downarrow$
1	1
2	3
17	
	7
34	21

$PGCD(34;21) = 1$.

$PGCD(a;b;c)$.

$PGCD(ka; kb) = k \times PGCD(a;b)$.

$PGCD(\underbrace{3 \times \underline{3}}_{9}; \underbrace{3 \times 2}_{6}) = 3 \times PGCD(3;2)$

$k \quad a \quad k \quad b$

+ $PGCD(9;6) = 3$
+ $3 \times PGCD(3;2) = 3 \times 1 = 3$

$$\frac{1}{6\times 2} + \frac{1}{4\times 3}$$

$PGCD(a;b) = D$

$\Rightarrow \exists (u;v) \in \mathbb{Z}^2$

t.q $au + bv = D$.

$$PGCD(32;44) = 4.$$

$$\Rightarrow$$

$\exists (u;v) \in \mathbb{Z}$ t.q.

$32u = 4 - 44v$ x

y $u = \boxed{\frac{4-44v}{32}}$

$32 \times u + 44 \times v = 4$.

Egalité de Bezout:

Soit $(a;b) \in \mathbb{Z}^2$. $PGCD(a;b) = D$ $\Rightarrow \exists (u;v) \in \mathbb{Z}^2$ t.q

$au + bv = D$.

Soient a et b deux entiers non nuls.

$E = \{ma + nb \mid (m;n) \in \mathbb{Z}^2\}$. constitués d'éléments strictement $\oplus$

E est non vide. $|b| \in E$.

E contient donc un plus petit élément. $\{4; 8); 1; 25 \dots\}$.

Soit d le plus petit élément de E.

donc $d = au + bv$. $x \in]2;3]$.

On pose: $PGCD(a;b) = D$ $\Rightarrow D/a$ et D/b.

$D/(au+bv)$.

D/d. $\Rightarrow \boxed{D \leq d}$.

M.q d divise a : $a = dq + r$. où $0 \le r < d$

On suppose $r \neq 0$.

$$r = a - dq.$$

$$r = a - (au + bv) \times q.$$

$$r = a - auq - bvq.$$

$r = b(1-vq) + a(-uq)$

$\Downarrow$

d/b.

$$r = a\underbrace{(1-uq)}_{M} + b\underbrace{(-vq)}_{N}.$$

$r \in E$ # $r < d$.

$\Rightarrow r = 0$.

$a = dq \Rightarrow d/a$

d/a et d/b. d est un diviseur commun de a et b.

$\Rightarrow \boxed{d \le D}$

Or $\boxed{D \le d}$

$\Rightarrow \boxed{D = d = au + bv}$.