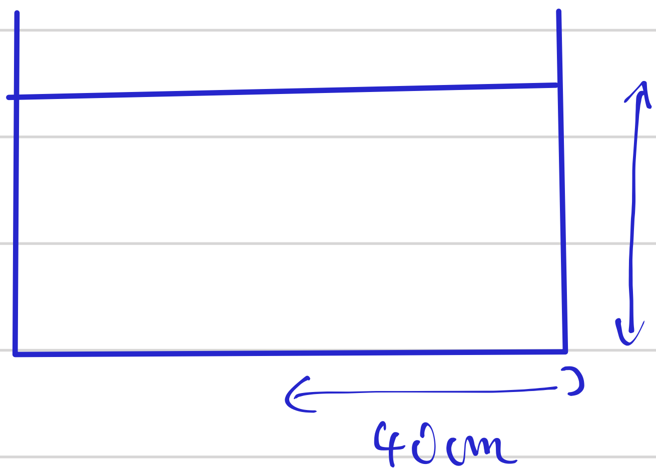
Séance du 10/11/19 $\boxed{\text{Continuité et Probas.}}$

1)

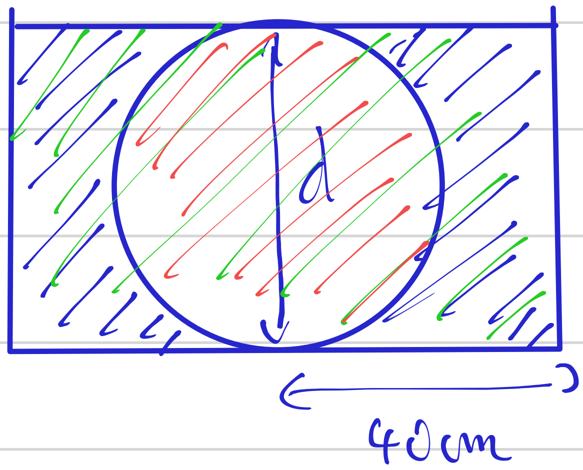
(1)



$V_{eau}(1) = \pi \times 40^2 \times 20$

$V_{eau}(1) = 32000\pi.$

(2)



$V_{eau}(2) = \pi \times 40^2 \times d - \frac{4}{3} \times \pi \times \left(\frac{d}{2}\right)^3$

$V_{eau}(2) = 1600\pi \times d - \frac{4}{3} \times \pi \times \frac{d^3}{4 \times 2}$

$V_{eau}(2) = 1600\pi \times d - \frac{\pi}{6} \times d^3.$

Or le volume de l'eau se conserve dans les 2 situations :

$$V_{eau}(1) = V_{eau}(2)$$

$$32000\pi = 1600\pi d - \frac{\pi}{6} \times d^3. \quad) \times \frac{6}{\pi}.$$

$$192000 = 9600d - d^3.$$

$$\boxed{d^3 - 9600d + 192000 = 0.}$$

De plus le diamètre de la sphère est nécessairement inférieur à celui du cylindre donc $d \leq 80.$

Or d est diamètre donc $d \geq 0.$

Finalement : $\begin{cases} 0 \leq d \leq 80 \\ d^3 - 9600\,d + 192000 = 0. \end{cases}$

2) $f(x) = x^3 - 9600x + 192000.$

$x \in [0;80].$

On dérive la f° f : $f'(x) = 3x^2 - 9600.$

On résout $f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 9600 = 0.$

$3x^2 = 9600$

$x^2 = \dfrac{9600}{3} = 3200.$

$x = \sqrt{3200}$ ou $x = -\sqrt{3200}$

$x = \sqrt{32 \times 100}$ — impossible car $x \in [0;80]$ donc $x \geq 0$.

$x = \sqrt{32} \times \sqrt{100}$ — D'où le tableau de signe de $f'(x)$

$x = 10\sqrt{32}$ — et le tableau de var° de f :

$x = 10\sqrt{16 \times 2}$

$x = 10\sqrt{16} \times \sqrt{2}$

$x = 40\sqrt{2}.$

x	0		$40\sqrt{2}$		80
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Var° de f	192000	$\searrow$	$-256000\sqrt{2} + 192000 < 0$	$\nearrow$	-64000

$f(0) = 0^3 - 9600 \times 0 + 192000 = 192000.$

$f(40\sqrt{2}) = (40\sqrt{2})^3 - 9600 \times 40\sqrt{2} + 192000$

$= 40^3 \times 2\sqrt{2} - 384000\sqrt{2} + 192000$

$= 128000\sqrt{2} - 384\,000\sqrt{2} + 192\,000$

$= -256000\sqrt{2} + 192\,000 \simeq -170\,039$ arrondi à l'unité.

$f(80) = 80^3 - 9600 \times 80 + 192000 = -64\,000$

b) D'après le tableau de variat° de la f°, le maximum de f sur $[40\sqrt{2}\,; 80]$ est $-64\,000 < 0$. Donc l'éq° $f(x) = 0$ n'admet aucune sol° sur $[40\sqrt{2}\,; 80]$.

En revanche sur $[0\,; 40\sqrt{2}]$, f est continue, strictement décroissante. $f(0) = 192\,000$

$f(40\sqrt{2}) < 0$

Donc d'après le corollaire du TVI, l'éq° $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0\,; 40\sqrt{2}]$ donc sur $[0\,; 80]$.

c) $\alpha \simeq 20{,}96$. $\qquad 20{,}95 \leq \alpha \leq 20{,}96$.

Probabilité.

Exemple

On lance un dé non truqué. On considère deux événements suivants :

A : Obtenir un nombre plus grand où égal à 3.

B : Obtenir 4

A : $\{3; 4; 5; 6\}$

B : $\{4\}$.

$A \cap B$: $\{4\}$.

$P_A(B) = \frac{1}{4}$.

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{4}{6}} = \frac{1}{6} \times \frac{6}{4} = \frac{1}{4}.$$

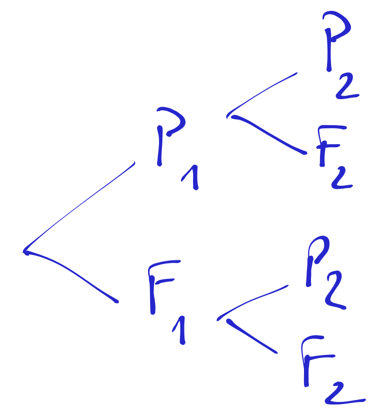
Preuve

Dans le cas général, on a :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A).$$

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A)$$

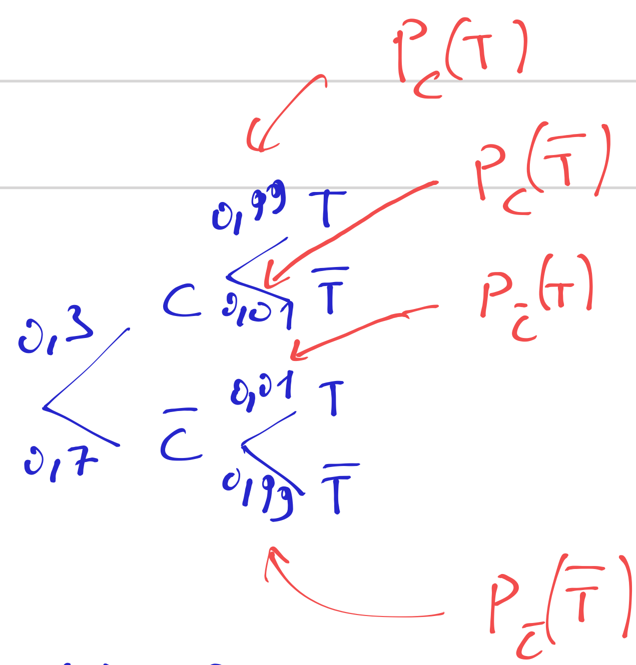


Exemple : Un village de 5000 habitants est touché par un virus qui contamine 30% de la la pop°. Les médecins font passer un test de dépistage fiable à 99% :

T : est l'évènement le test est positif.

C : est l'évènement la personne est contaminé

On choisit une personne au hasard ds le village

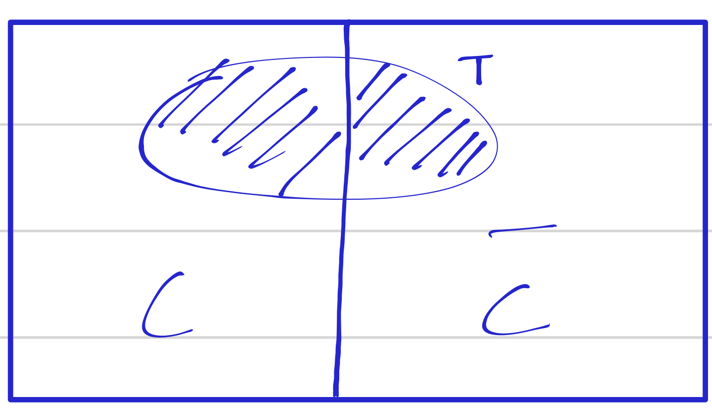


$$P(T) = P(C \cap T) + P(\overline{C} \cap T)$$

$$= P(C) \times P_C(T) + P(\overline{C}) \times P_{\overline{C}}(T).$$

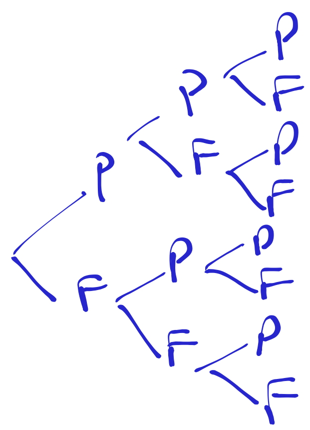
$$= 0{,}3 \times 0{,}99 + 0{,}7 \times 0{,}01$$

$$= 0{,}304$$



Une variable aléatoire, notée X, est une fonction mathématique qui associe à chaque événement élémentaire d'une expérience aléatoire un unique réel.

Exemple On lance 3 fois de suite une même pièce de monnaie et on note dans l'ordre les résultats.



PPP $X = 3$
PPF $X = 2$
PFP $X = 2$
PFF $X = 1$
FPP $X = 2$
FPF $X = 1$
FFP $X = 1$
FFF $X = 0$

On construit une variable aléatoire qui associe à chaque issue le nombre de pile.

2 Définition d'une loi de probabilité

Exemple On reprend l'exemple précédent :

$X = k$	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Exemple On reprend l'ex précédent :

$$E(X) = \frac{1}{8} \times 0 + \frac{3}{8} \times 1 + \frac{3}{8} \times 2 + \frac{1}{8} \times 3$$

$$E(X) = 1{,}5.$$

On obtient en moyenne 1,5 pile.

$$Y_i = aX_i + b.$$

Démonstration

Par définition: $E(Y) = \sum_{i=0}^{n} p_i Y_i$

$$= \sum_{i=0}^{n} p_i(aX_i + b)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} ap_i X_i + bp_i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} ap_i x_i + \sum_{i=0}^{n} bp_i$$

$$= a\sum_{i=0}^{n} p_i x_i + b\sum_{i=0}^{n} p_i$$

$$= \boxed{a E(x) + b}$$

Page 4

$$\sum_{i=0}^{n} ka_i + b_i = ka_0 + b_0 + ka_1 + b_1 + ka_2 + b_2 + \dots + ka_n + b_n.$$

$$= ka_0 + ka_1 + \dots + ka_n + b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n.$$

$$= k\sum a_i + \sum b_i.$$

Variance :

0 ; 20 → 10 mauvaise appréciat°

10 ; 10 → 10 bonne appréciation.

Exemple

$$V(X) = \frac{1}{8} \times (0-1{,}5)^2 + \frac{3}{8} \times (1-1{,}5)^2 + \frac{3}{8} \times (2-1{,}5)^2 + \frac{1}{8} \times (3-1{,}5)^2$$

$$V(X) = 0{,}75.$$

Propriété

Démonstration $Y = aX + b.$

$$\boxed{V(Y) = a^2 V(X)}$$

$$V(Y) = \sum_{i=0}^{n} p_i (y_i - E(Y))^2.$$

$$= \sum_{i=0}^{n} p_i (a x_i + \cancel{b} - a E(X) - \cancel{b})^2$$

$$= \sum_{i=0}^{n} p_i (a(x_i - E(X)))^2$$

$$= \sum_{i=0}^{n} p_i \, a^2 (x_i - E(X))^2$$

$$= a^2 \sum_{i=0}^{n} p_i (x_i - E(X))^2$$

$$= a^2 \cdot V(X)$$