Séance du 03/11/19

$\boxed{\text{TD sur la continuité.}}$

n° 5

d) D'après les questions précédentes, on obtient le signe de u sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$ $\qquad$ α $\qquad$ $+\infty$
$u(x)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

2) Soit la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x^3}$.

a) Déterminer les limites de f en -1 et en $+\infty$

en $+\infty$

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x^3} = \frac{x\left(\frac{1}{x}-1\right)}{x^3\left(\frac{1}{x^3}+1\right)}$$

$$= \frac{\cancel{x}\left(\frac{1}{x}-1\right)}{\cancel{x}\times x^2\left(\frac{1}{x^3}+1\right)}.$$

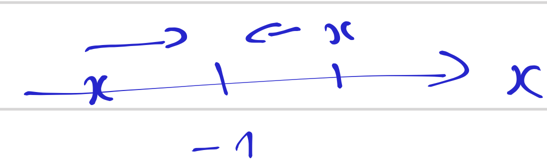
$$= \frac{\frac{1}{x}-1}{x^2\left(\frac{1}{x^3}+1\right)}.$$

D'une part : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}-1 = -1$

D'autre part : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3}+1 = 1$

Par produit des limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{1}{x^3}+1\right) = +\infty$

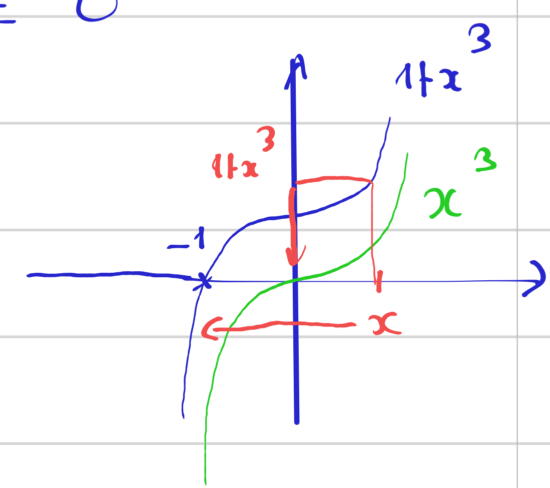
Par quotient des limites $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.



+ en -1^+ $(x > -1)$

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} 1-x = 2$. $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} 1+x^3 = 0^+$



Par quotient des limites, $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty$.

b) Déterminer la fonction dérivée f' et montrer que : $f'(x) = \dfrac{u(x)}{(1+x^3)^2}$

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$$

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$u(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1.$$

$$f'(x) = \frac{u'(x)\,v(x) - v'(x) \times u(x)}{(v(x))^2}$$

$u(x) = 1-x$ $u'(x) = -1$

$v(x) = 1+x^3$ $v'(x) = 3x^2$

$$f'(x) = \frac{-1 \times (1+x^3) - 3x^2 \times (1-x)}{(1+x^3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-1 - x^3 - 3x^2 + 3x^3}{(1+x^3)^2} = \frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{(1+x^3)^2} = \frac{u(x)}{(1+x^3)^2}.$$

c) Déterminer le signe de f' sur $]-1;+\infty[$ puis dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]-1;+\infty[$.

$\forall x \in]-1;+\infty[$, $(1+x^3)^2 > 0$ donc le signe de f' ne dépend que de $u(x)$ d'où :

x	-1		α		$+\infty$
$u(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Varᵒ de $f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	0

d) En remarquant que $2\alpha^3 - 3\alpha^2 - 1 = 0$ montrer que $f(\alpha) = \boxed{\dfrac{2(1-\alpha)}{3(\alpha^2+1)}}$.

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$$

$$u(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$$

Or u s'annule en α : $2\alpha^3 - 3\alpha^2 - 1 = 0$

$$f(\alpha) = \frac{1-\alpha}{1+\alpha^3}$$

Or $2\alpha^3 - 3\alpha^2 - 1 = 0$.

$$2\alpha^3 = 3\alpha^2 + 1$$

$$\alpha^3 = \frac{3\alpha^2+1}{2}$$

$$f(\alpha) = \frac{1-\alpha}{1+\frac{3\alpha^2+1}{2}} = \frac{1-\alpha}{\frac{2+3\alpha^2+1}{2}} = \frac{1-\alpha}{\frac{3\alpha^2+3}{2}} = \boxed{\frac{2(1-\alpha)}{3(\alpha^2+1)}}$$

3) On donne les fonctions g et h définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = x(x-1)$ et $h(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$

a) Conjecturer avec une calculatrice les positions des courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ représentatives des fonction g et h. On pourra prendre comme fenêtre $x \in [-4; 4]$ et $y \in [-5; 5]$

D'après la calculatrice, sur $]-\infty; 0[$, $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de $\mathscr{C}_h$.
sur $]0; 1{,}68[$, $\mathscr{C}_h$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$.
sur $]1{,}68; +\infty[$, $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de $\mathscr{C}_h$.

b) Montrer que $g(x) - h(x) = \boxed{\frac{u(x)}{2x}}$ puis à l'aide d'un tableau de signes, déterminer le signe de $g - h$ sur $\mathbb{R}^*$

c) En déduire la véracité de votre conjecture.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) - h(x) = x(x-1) - \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$.

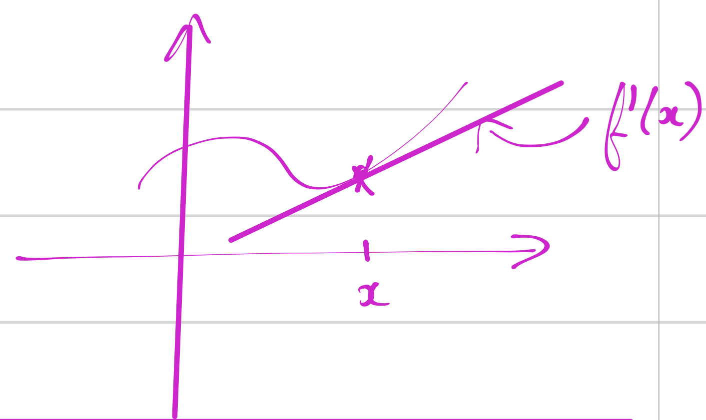
$$= \frac{2x \times x^2 - x \times 2x}{2 \times x} - \frac{x \times x}{2 \times x} - \frac{1}{2x}$$

$$= \frac{2x^3 - 2x^2 - x^2 - 1}{2x} = \frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{2x}.$$

$$g(x) - h(x) = \frac{u(x)}{2x}.$$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$u(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x$		$-$	0	$+$		$+$	
$(g-h)(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
Pos° relatives		$\mathscr{C}_g$ au-dessus $\mathscr{C}_h$		$\mathscr{C}_h$ au-dessus de $\mathscr{C}_g$		$\mathscr{C}_g$ au-dessus de $\mathscr{C}_h$	

Rappels sur la dérivation.



$f(x) = 2x^2 + 4x - 1$

$\boxed{f'(x)\,?}$ géométriquement représente le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en x.

Si $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante

Si $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante.

Soit $a \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \end{aligned}}$$

Equat° de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en a :

$$\boxed{T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a).}$$

Tableau des dérivées des f° usuelles.

$f(x)$	$f'(x)$
$C \in \mathbb{R}$	0

$f(x)$	$f'(x)$
$ax+b$	a
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$ ou $1+\tan^2(x)$.

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\tan'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) + \sin(x)\sin(x)}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2$$

$$= 1 + \tan^2(x)$$

Tableau des opérat° sur les dérivées

$f(x)$	$f'(x)$
$u(x)+v(x)$	$u'(x)+v'(x)$
$k \times u(x)$ $k \in \mathbb{R}$	$k\,u'(x)$
$u(x) \times v(x)$	$u'(x) \times v(x) + v'(x)\,u(x)$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x)\,v(x) - v'(x)\,u(x)}{v^2(x)}$
$(u(x))^n$	$n \times u'(x) \times (u(x))^{n-1}$
$\frac{1}{u(x)}$	$-\frac{u'(x)}{(u(x))^2}$
$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$\cos(u(x))$	$-u'(x)\sin(u(x))$
$\sin(u(x))$	$u'(x)\cos(u(x))$

Exercice 7 :

5) 3) 2) 6) 7)
9)

n°7

2) $f(x) = \dfrac{1-2x}{x-2}$ $\quad u(x) = 1-2x \quad v(x) = x-2$

$u'(x) = -2 \quad v'(x) = 1$

$$f'(x) = \frac{-2\times(x-2) - 1\times(1-2x)}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cancel{-2x}+4 - 1 + \cancel{2x}}{(x-2)^2} = \frac{3}{(x-2)^2}.$$

3) $f(x) = x-6+\dfrac{9}{x-1} = x-6+9\times\dfrac{1}{x-1}.$

$$f'(x) = 1 + 9\times\frac{(-1)}{(x-1)^2} = 1 - \frac{9}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 3^2}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x-1+3)(x-1-3)}{(x-1)^2} = \frac{(x+2)(x-4)}{(x-1)^2}.$$

5) $f(x) = (x^2+2x-3)^2$ $\qquad (u(x))^2 \longrightarrow 2u'(x)u(x)$

$$f'(x) = 2\times(2x+2)(x^2+2x-3)$$

6) $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^3$ $\qquad (u(x))^3 \longrightarrow 3u'(x)(u(x))^2$

$$f'(x) = 3\times\frac{1\times(x+2) - 1\times(x+1)}{(x+2)^2}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2$$

$$f'(x) = 3 \times \frac{\cancel{x}+2-\cancel{x}-1}{(x+2)^2} \times \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2$$

$$f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} \times \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2 .$$

7) $f(x) = \cos(2x)$ $\qquad \cos(u(x)) \longrightarrow -u'(x)\sin(u(x))$

$$f'(x) = -2 \times \sin(2x).$$

9) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{2-x}}$. $\qquad \sqrt{u(x)} \longrightarrow \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1(2-x)-(-1)\times(x+1)}{(2-x)^2}}{2\times\sqrt{\dfrac{x+1}{2-x}}} = \frac{\dfrac{2\cancel{-x}+\cancel{x}+1}{(2-x)^2}}{2\times\sqrt{\dfrac{x+1}{2-x}}}$$

$$= \frac{\dfrac{3}{(2-x)^2}}{2\times\sqrt{\dfrac{x+1}{2-x}}}$$

n°8

2) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ $\qquad a = 2.$ $\qquad T_2 : y = f'(2)(x-2) + f(2)$

$f'(2)$? $\quad f(2)$? $\quad$ Déterminons d'abord $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{1 \times (x^2+1) - 2x \times x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} \quad . \quad f'(2) = \frac{-2^2+1}{(2^2+1)^2} = \frac{-3}{25}$$

$$f(2) = \frac{2}{2^2+1} = \frac{2}{5}$$

$$Y = f'(2)\,(x-2) + f(2)$$

$$Y = -\frac{3}{25}(x-2) + \frac{2}{5}.$$

$$Y = -\frac{3}{25}x + \frac{6}{25} + \frac{2}{5}$$

$$Y = -\frac{3}{25}x + \frac{6}{25} + \frac{10}{25}$$

$$Y = -\frac{3}{25}x + \frac{16}{25}$$

Exercice n°10