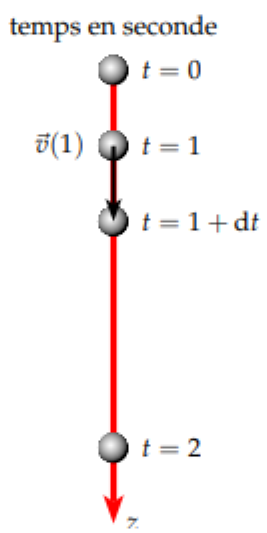
Activité introductive, dérivation, nombre dérivé et fonction dérivée.

Première partie, une origine physique

La notion de nombre dérivé ne s'est pas construite en jour. Tout commence avec une histoire de vitesse instantanée et de chute des corps.

Dès l'antiquité, Galilée démontre que si on lâche d'une hauteur suffisamment grande une pierre, et si on néglige les forces de frottement qu'elle subit, cette dernière aura une cote $z(t)$ qui peut se mettre sous la forme :

$$z(t) = 5t^2$$



Remarquez ici que pour simplifier les calculs, l'axe des cotes est orienté vers le bas.

1- Quelle distance a parcouru la pierre au bout de 10s ?
2- Quelle est alors la vitesse moyenne pendant ces 10 premières secondes ?
3- Quelle distance a parcouru la pierre entre 15 et 20 secondes ?
4- Quelle est alors sa vitesse moyenne entre 15 et 20 secondes ?

L'objectif est maintenant de trouver la vitesse INSTANTANEE à $t = 1s$

5- Proposez une valeur approximative de cette vitesse instantanée ?
6- Proposez une méthode qui permet d'améliorer cette valeur.

De manière générale, pour avoir la vitesse instantanée en un instant t, on peut utiliser la formule suivante :

$$\frac{z(t+dt) - z(t)}{t + dt - t} = \frac{z(t+dt) - z(t)}{dt}$$

Cependant, il faut que dt soit le plus proche possible de 0 pour obtenir la véritable vitesse instantanée. Cela se note :

$$\lim_{dt \to 0} \frac{z(t+dt) - z(t)}{dt}$$

Deuxième partie, généralisation mathématique

La distance parcourue par la balle est en réalité une fonction mathématique qui peut s'écrire :

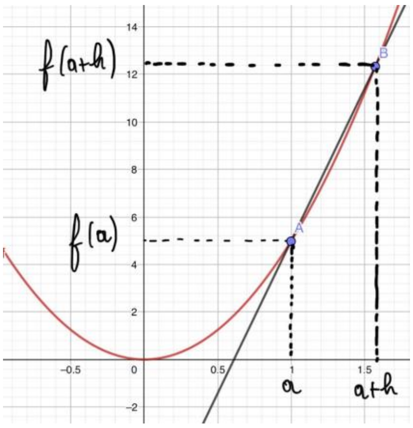
$$f(x) = 5x^2$$

- On remplace en fait z par f et t par x

Le nombre dérivé pour une certaine valeur de x que l'on peut noter a est exactement :

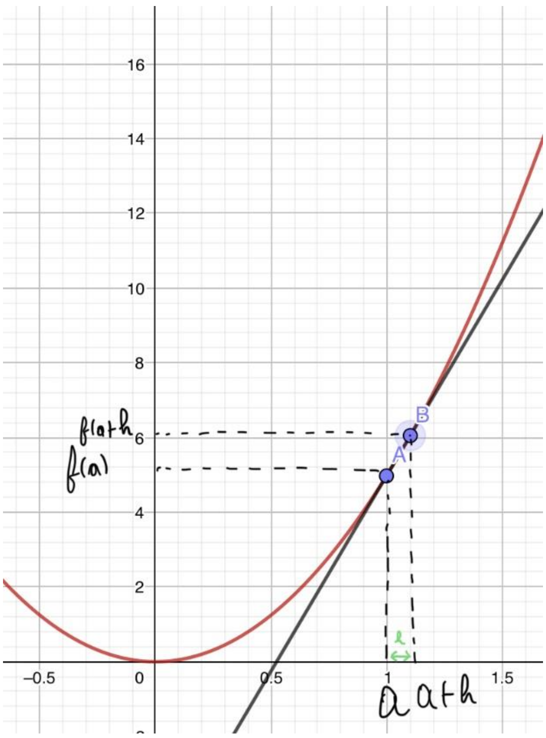
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Voyons à quoi cela correspond sur un graphique :



On voit bien que $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ représente le coefficient directeur de la droite (AB).

Lorsque h se rapproche de 0, on obtient :



On voit bien que : $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est le coefficient directeur d'une droite bien spéciale appelée la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a.