

Probabilité, variable aléatoire. Loi binomiale

Loi de probabilité

EXERCICE 1

Dans une urne, il y a 3 boules vertes (V), 3 bleues (B) et 4 jaunes (J). On tire au hasard une boule et on note sa couleur. Y-a-t-il équiprobabilité lorsqu'on choisit comme univers :

- a) $\{V ; B ; J\}$? b) L'ensemble des 10 boules ?

EXERCICE 2

Un dé est déséquilibré. On estime que les probabilités d'apparition des faces 2, 3, 4, 5 sont égales ; que celle de la face 6 est deux fois plus petite que chacune des précédentes ; et la probabilité de la face 1 est 0,5.

Donner la loi de probabilité définie sur l'ensemble des 6 faces.

EXERCICE 3

Un dé est déséquilibré de sorte que la probabilité de sortie de chacune des faces est proportionnelle à son numéro.

Donner la loi de probabilité définie sur l'ensemble des 6 faces.

Probabilité d'un événement

EXERCICE 4

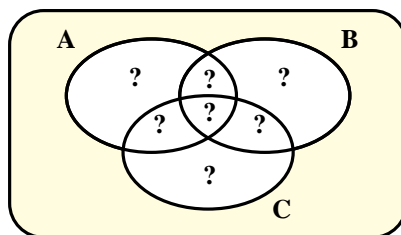
Diagramme de Venn

Trois revue scientifiques A, B et C sont mises à la disposition des élève d'un lycée. On sait que :

- 52 % ont lu A, 43 % ont lu B et 37 % ont lu C ;
- 22 % ont lu A et B, 15 % ont lu A et C et 13 % ont lu B et C ;
- 8 % ont lu les trois revues.

On interroge un élève au hasard.

- 1) Compléter le diagramme suivant : (mettre un nombre à la place de "?")



- 2) Quelle est la probabilité :

- a) Que l'élève ait lu seulement une revue ?
- b) Que l'élève n'ait lu aucune revue ?

EXERCICE 5**Tableau double entrées**

Sur les 485 candidats au baccalauréat général d'un lycée, on sait que :

- 370 ont été reçus dont 212 filles.
- 40 garçons n'ont pas été reçus

On appelle F l'événement "*le candidat est une fille*", G "*le candidat est un garçon*" et R "*le candidat est reçu*".

1) Compléter le tableau suivant :

	F	G	Total
R			
\bar{R}			
Total			485

2) On rencontre par hasard un candidat, quelle est la probabilité que ce candidat soit :

- a) un garçon reçu ? b) une fille non reçue ? c) non reçu ?

3) On rencontre par hasard un garçon candidat. Quelle est la probabilité qu'il soit reçu ?

4) On rencontre au hasard un élève non reçu. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

EXERCICE 6

Un relevé de caisse de magasin a fourni les renseignements suivants concernant les modes de paiement et les montants M des achats :

- 80 % des achats sont payés par chèque ;
- 70 % des achats sont d'un montant inférieur à 200 euros, dont 20 % sont réglés en espèces ;
- 2 % des clients utilisent une carte de paiement qui ne permet pas de régler des achats inférieurs à 200 euros.

1) Recopier puis complétez le tableau ci-dessous.

	$M \leq 200$	$M > 200$	Total
Espèces			
Chèques			
Carte			
Total			

2) Calculer la probabilité des événements suivants :

- A : "*l'achat dépasse 200 euros*";
- B : "*l'achat dépasse 200 euros, payé en espèces*";
- C : "*l'achat dépasse 200 euros ou l'achat est réglé en espèces*".

3) Un achat est payé en espèces.

Quelle est la probabilité qu'il dépasse 200 € ?

4) Un achat est inférieur ou égal 200 €. Quelle est la probabilité qu'il soit payé en espèces ?

EXERCICE 7**Arbre de probabilité**

Dans son dressing, Paul a deux pantalons – un noir et un bleu – trois chemises – une bleue, une jaune et une noire – et deux vestes – une bleue et une marron.

- 1) A l'aide d'un arbre dénombrer l'ensemble de ses tenues possibles (un pantalon, une chemise et une veste).
- 2) On suppose que l'ensemble des tenues est muni d'une loi équirépartie. Calculer les probabilités des événements suivants :
 - A : "Il est habillé tout en bleu"
 - B : "Il a une chemise et une veste de couleur différente"
 - C : "Il ne porte ni pantalon noir, ni veste bleu"

EXERCICE 8**Prendre toutes les initiatives**

Un urne contient deux boules blanches et quatre boules rouges, toutes indiscernables au toucher.

- 1) On tire simultanément au hasard trois boules dans l'urne. Quelle est la probabilités des événements suivants :
 - A : "Le tirage ne contient aucune boule blanche"
 - B : "Le tirage contient une boule blanche"
 - C : "Le tirage contient deux boules blanches"
- 2) a) On tire successivement trois boules avec remise. Déterminer la probabilité des événements A, B et C définis à la question précédente.
- b) A-t-on $p(A) + p(B) + p(C) = 1$? Pourquoi ?

EXERCICE 9

ABCD est un tétraèdre régulier. Un scarabée se déplace sur les arêtes de ce tétraèdre, et uniquement sur les arêtes. Son déplacement obéit aux règles suivantes

- le temps de parcours d'une arête est une minute ;
- à un sommet, il choisit au hasard l'une des trois arêtes ;
- le scarabée part du sommet A.

Calculez les probabilités des événements suivants :

- a) A : "le scarabée repasse en A au bout de trois minutes".
- b) B : "le scarabée ne passe pas par le sommet C pendant les trois premières minutes".

EXERCICE 10**Problème du chevalier de Méré**

Deux joueurs Albert et Bernard jouent à jeu quelconque en trois manches. Ils misent chacun 32 pistoles. Le premier qui totalisera trois manches gagnantes reçoit les 64 pistoles jouées.

La première manche est gagnée par Albert. On doit s'arrêter là pour des raisons indépendantes de leur volonté. Comment répartir les 64 pistoles misées ?

Piste : Rendre les mises à chacun : ce ne serait pas juste : Albert a gagné une partie. On répartit alors les 64 pistoles selon l'espérance de gain des deux joueurs à ce moment

du jeu. On pourra faire un arbre pour connaître la probabilité pour que Albert ait gagné si l'on avait poursuivi la partie.

EXERCICE 11

A et B sont deux événements d'une même expérience aléatoire tels que :

- a) $p(A) = 0,3$, $p(A \cup B) = 0,7$ et $p(A \cap B) = 0,2$. Calculer $p(\bar{B})$.
 b) $p(\bar{A}) = 0,44$, $p(\bar{B}) = 0,63$ et $p(\overline{A \cup B}) = 0,32$. Calculer $p(A \cap B)$.

EXERCICE 12

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher numérotés de 1 à 5. On tire deux boules au hasard, l'une après l'autre et sans remise. Ainsi, une issue est un couple $(a ; b)$ où a est le premier numéro et b le second.

On considère les événements suivants :

- A : " $a + b = 5$ "
- B : " $|a - b| = 1$ "

- 1) Combien y a-t-il d'issues ?
- 2) Calculer les probabilités suivantes :

a) $p(A)$	b) $p(B)$	c) $p(A \cap B)$	d) $p(A \cup B)$
-----------	-----------	------------------	------------------
- 3) Calculer les probabilités suivantes :

a) $p(\bar{A})$	b) $p(\bar{B})$	c) $p(\bar{A} \cap \bar{B})$	d) $p(\bar{A} \cup \bar{B})$
-----------------	-----------------	------------------------------	------------------------------

Variable aléatoire

EXERCICE 13

Un joueur lance un dé parfait. Si le numéro sorti est 2 ou 4, il gagne 1,5 €, si le numéro sorti est impair il gagne 0,5 € et, si le 6 sort, il perd 5 €.

On appelle X la variable aléatoire qui à un numéro associe le gain algébrique en euros. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer $E(X)$.

EXERCICE 14

Loterie (4 points)

Une loterie organisée par une association sportive est constituée d'un ensemble Ω de billets numérotés de 1 à 2 000. Un des billets rapporte un lot de 500 €, deux billets un lot de 150 € et cinq billets un lot de 100 €. Le prix du billet est de 2 €.

On achète un billet au hasard.

X est la variable aléatoire, définie sur Ω , égale au gain algébrique procuré par le billet.

- 1) Déterminer les valeurs prises par X en tenant compte du prix du billet.
- 2) Déterminer la loi de probabilité de X .
- 3) Calculer l'espérance mathématique de X . Qu'en concluez vous ?
- 4) L'association décide de limiter le nombre de billets à un nombre x , avec x compris entre 1 et 2 000, pour que le jeu devienne équitable. Calculer x .

EXERCICE 15

Un club de natation propose à ses adhérents trois types d'activités : la compétition C, le loisir L et l'aquagym A. Chaque adhérent ne peut pratiquer qu'une seule de ces activités. Voici la répartition des adhérents suivant l'activité choisie :

- L : 30 %
- A : 20 %
- C : 50 %

L'adhésion à la section L ou à la section A coûte 60 € tandis que l'adhésion à la section C revient à 100 € pour l'année. En outre, le club organise chaque année une journée de rencontre, notée R, pour laquelle une participation de x euros ($0 < x < 40$) par participant est demandée. Un tiers des adhérents de L, un quart de ceux de A et la moitié de ceux de C participent à cette journée.

1) Compléter le tableau suivant en inscrivant les pourcentages qui conviennent.

	L	A	C	Total
R				
\bar{R}				
Total				100 %

- 2) On interroge au hasard un membre du club. On appelle S la variable aléatoire qui à chaque adhérent associe le montant annuel à verser au club (cotisation plus participation éventuelle à la rencontre).
- Quelles sont les valeurs prises par S ?
 - Indiquer la loi de probabilité de S en fonction de x .
 - Calculer $E(S)$ en fonction de x .
 - A quel prix le directeur du club doit-il fixer la participation à la journée de rencontre s'il veut que le coût moyen par adhérent ne dépasse pas 90 €.

EXERCICE 16

Au jeu de la roulette, les 37 issues 0, 1, 2, ..., 36 sont équiprobables.

On se propose de comparer trois stratégies de jeu.

- **Stratégie 1** : un joueur mise 10 € sur "rouge". Si un numéro rouge sort, il reçoit le double de sa mise ; sinon, perd sa mise.
- **Stratégie 2** : il mise 10 € sur un numéro. S'il sort, il reçoit 36 fois sa mise ; sinon, il perd sa mise.
- **Stratégie 3** : il mise 10 € sur l'événement P_{12} (première douzaine) qui correspond à la sortie de l'un des numéros 1, 2, ..., 12. Si cet événement est réalisé, il reçoit le triple de sa mise ; sinon, il perd sa mise.

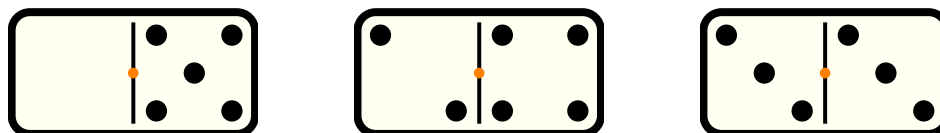


- 1) Pour chacune des stratégies :
- Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire qui indique le gain algébrique du joueur.

- b) Calculer l'espérance mathématique et la variance.
- 2) Comparer les espérances et les variances. Quelle interprétation faites-vous concernant le gain moyen et la possibilité de "gagner une grosse somme" ?

EXERCICE 17

Dans un jeu de dominos, chaque domino est partagé en deux parties, chacune portant un numéro de 0 à 6 représenté par des points. Un double est un domino dont les deux parties portent le même numéro.



- 1) Prouvez que le nombre de dominos est 28.
- 2) Un joueur tire au hasard un domino d'un jeu.
 - a) Quelle est la probabilité d'obtenir un double ?
 - b) Quelle est la probabilité d'obtenir un domino dont la somme des deux numéros soit divisible par 3 ?
- 3) X est la variable aléatoire prenant la valeur -1 lorsque le joueur obtient un domino non double, et la valeur n lorsqu'il obtient le double " n et n ".
 - a) Quelle est la loi de probabilité de X ?
 - b) Calculez $E(X)$.

Coefficients binomiaux

EXERCICE 18

On donne $\binom{10}{4} = 210$ et $\binom{10}{5} = 252$

À l'aide des propriétés des coefficients binomiaux, calculer : $\binom{10}{6}$ et $\binom{11}{5}$

EXERCICE 19

Utiliser le triangle de Pascal pour trouver l'entier n dans le cas suivants :

a) $\binom{n}{2} = 36$ et b) $3\binom{n}{4} = 14\binom{n}{2}$

EXERCICE 20

En utilisant la formule : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ et en remarquant que $\binom{3}{3} = \binom{4}{4}$, déterminer les entiers n et p tel que :

$$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \binom{7}{3} = \binom{n}{p}$$

Répétition d'épreuves

EXERCICE 21

Pour un archer, la probabilité d'atteindre une cible est de 0,8. Il lance une volée de trois flèches et on suppose les tirs indépendants. Quelle est la probabilité :

- a) que toutes les flèches ratent la cible ? b) qu'au moins une flèche soit dans la cible ?

EXERCICE 22

On lance trois fois de suite une pièce bien équilibrée. On décide de coder Pile par 1 et Face par 0.

On considère le jeu suivant :

- si 1 sort au premier lancer, on gagne 1 € ;
- sinon, s'il sort au deuxième lancer, on gagne 2 € ;
- sinon, s'il sort au troisième lancer, on gagne 4 € ;
- enfin, s'il n'est pas sorti, on perd n €.

On appelle G la variable aléatoire donnant le gain algébrique.

- a) Déterminer la loi de probabilité de G .
b) Comment choisir n pour que le jeu soit équitable ?

EXERCICE 23

Un avion dispose de trois moteurs à hélices du même type : un moteur central MC et deux moteurs d'aile MG et MD.



L'avion se maintient en vol lorsque le moteur central ou les deux moteurs d'aile fonctionnent.

La probabilité qu'un des moteurs fonctionne est 0,995. Les trois moteurs fonctionnent de façon indépendantes les uns par rapport aux autres.

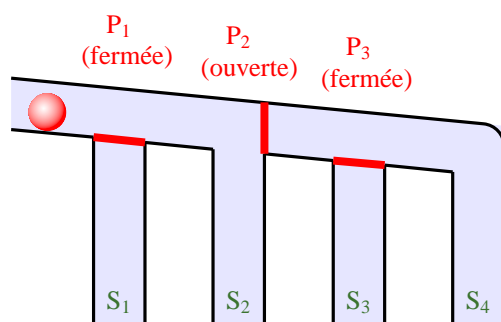
On appelle F l'événement "*le moteur fonctionne*".

- 1) Représenter la situation par un arbre pondéré, en considérant successivement le fonctionnement du moteur de l'aile gauche, puis du moteur central et enfin du moteur de l'aile droite.
- 2) En déduire à 10^{-6} près la probabilité que l'avion s'écrase au sol.

EXERCICE 24

Un jeu de hasard consiste à introduire une bille dans le tube d'une machine. Cette machine possède trois portes P_1 , P_2 et P_3 qui ferment ou ouvrent les accès aux quatre sorties possibles S_1 , S_2 , S_3 et S_4 .

Un système électronique positionne de façon aléatoire ces trois portes en position "*ouvertes*" ou "*fermées*" indépendamment les unes des autres.



Pour jouer, on doit miser 7 €.

Si la bille sort en S_1 , on ne reçoit rien, sinon, si elle sort par S_2 , on reçoit 5 €, par S_3 , on reçoit 10 € et par S_4 , on reçoit 20 €.

X est la variable aléatoire qui à chaque partie associe le gain algébrique du joueur.

- 1) Représenter la situation par un arbre pondéré.
- 2) a) Déterminer la loi de probabilité de X .
b) Calculer $E(X)$.
c) Comment modifier le montant de la mise pour que ce jeu soit équitable ?

EXERCICE 25

Le lièvre et la tortue

Un course entre le lièvre et la tortue est simulée par le lancer d'un dé équilibré : si le résultat est 6 le lièvre a gagné, sinon la tortue avance d'une case. Les lancers sont indépendants.

La tortue gagne si elle atteint la case n° 6 (elle a donc six case à parcourir).



- 1) Pourquoi la course ne peut dépasser 6 lancers ?
- 2) a) Écrire un programme permettant de simuler une course. On prendra comme variables :
 - C : le numéro de la case où se trouve la tortue ;
 - G vaut 1 si le lièvre gagne la partie et 0 si la tortue gagne la partie.
 - X : le résultat d'un lancer de dé.
 - on affichera "L" si le lièvre gagne et "T" si la tortue gagne ;
- b) Exécuter dix fois une partie puis remplir le tableau suivant :

n° de la partie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
vainqueur										

- c) Entre le lièvre et la tortue, qui a plus de chance de gagner ?
- 3) a) Représenter par un arbre pondéré, la succession des six lancers.
b) Quelle est la probabilité que le lièvre gagne ? Retrouver la conjecture du 2)c).
- 4) On note N la variable aléatoire qui indique le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le lièvre vainqueur et 0 sinon.
 - a) Dresser le tableau de la loi de probabilité de N .
 - b) Calculer $E(N)$ puis interpréter ce résultat.

Loi binomiale**EXERCICE 26**

On tire successivement avec remise 8 cartes d'un jeu de 32. Quelle est la probabilité d'obtenir 5 cœurs ?

EXERCICE 27

On lance 6 fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir :

- Au plus deux "*Piles*" ?
- Au moins un "*Pile*" ?

EXERCICE 28

X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. A l'aide votre calculatrice, donner le tableau de la loi de X dans les cas suivants :

- $n = 6, p = 0,4$
- $n = 9, p = 0,6$

EXERCICE 29

X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. A l'aide votre calculatrice, calculer les probabilités demandées dans les cas suivants :

- $n = 15, p = 0,8$. Calculer $p(X = 8)$ et $p(X = 12)$.
- $n = 10, E(X) = 3$. Calculer $p(X \leq 3)$ et $p(X \geq 7)$.
- $p = 0,2, \sigma = 2$. Calculer $p(X \leq 2)$ et $p(X < 2)$

EXERCICE 30

La probabilité qu'une photocopieuse tombe en panne durant un mois donné est $p = 0,05$. Les pannes sont indépendantes les unes des autres.

Calculer les probabilités à 10^{-3} près que la photocopieuse :

- ne tombe pas en panne durant 1 an ;
- tombe en panne plus d'une fois durant cette année.

EXERCICE 31

Une entreprise fabrique des cartes à puce. Chaque puce peut présenter deux défauts a et b . On prélève au hasard, une puce dans la production de la journée.

Une étude a permis de montrer que la probabilité qu'une puce prélevée au hasard ait

- le défaut a est 0,03 ;
- le défaut b est 0,02 ;
- ni le défaut a ni le défaut b est 0,9506.

- Quelle est la probabilité que la puce ait les deux défauts à la fois ?
- Les puces sont conditionnées par lots de 100 pour un nettoyage avant montage sur la carte. On prélève au hasard un lot de 100 puces (on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise).

X est la variable aléatoire, qui à chaque lot, associe le nombre de puces défectueuses.

- a) Quelle est la loi de X ?
- b) Quel est en moyenne le nombre de puces sans défaut dans un lot de 100 ?
- c) Après le nettoyage, les puces sont regroupées par paquets de 800 pour alimenter l'atelier de montage sur la carte. On prélève au hasard un lot de 800 cartes (on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise). On appelle Y la variable aléatoire qui indique le nombre de cartes en mauvais état de fonctionnement. Déterminez le plus petit entier n tel que $p(Y > n) \leq 0,05$. Interpréter ce résultat.

EXERCICE 32

Une épreuve consiste à lancer deux dés cubiques parfaits, l'un bleu et l'autre rouge, dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

On note S l'événement "*la somme des numéros des deux dés est supérieure ou égale à 10*".

On répète dix fois de suite cette épreuve dans les mêmes conditions.

- 1) Quelle est la probabilité de S lors d'une épreuve ?
- 2) Quelle est la probabilité d'obtenir trois fois la réalisation de S lors des dix épreuves ?
On donnera la valeur arrondie à 10^{-3} près.
- 3) On répète cette épreuve n fois de suite.
 - a) Prouver que la probabilité p , d'obtenir au moins une fois S est : $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$
 - b) Quel est le nombre minimum d'épreuves pour que p soit supérieure à 0,9 ?