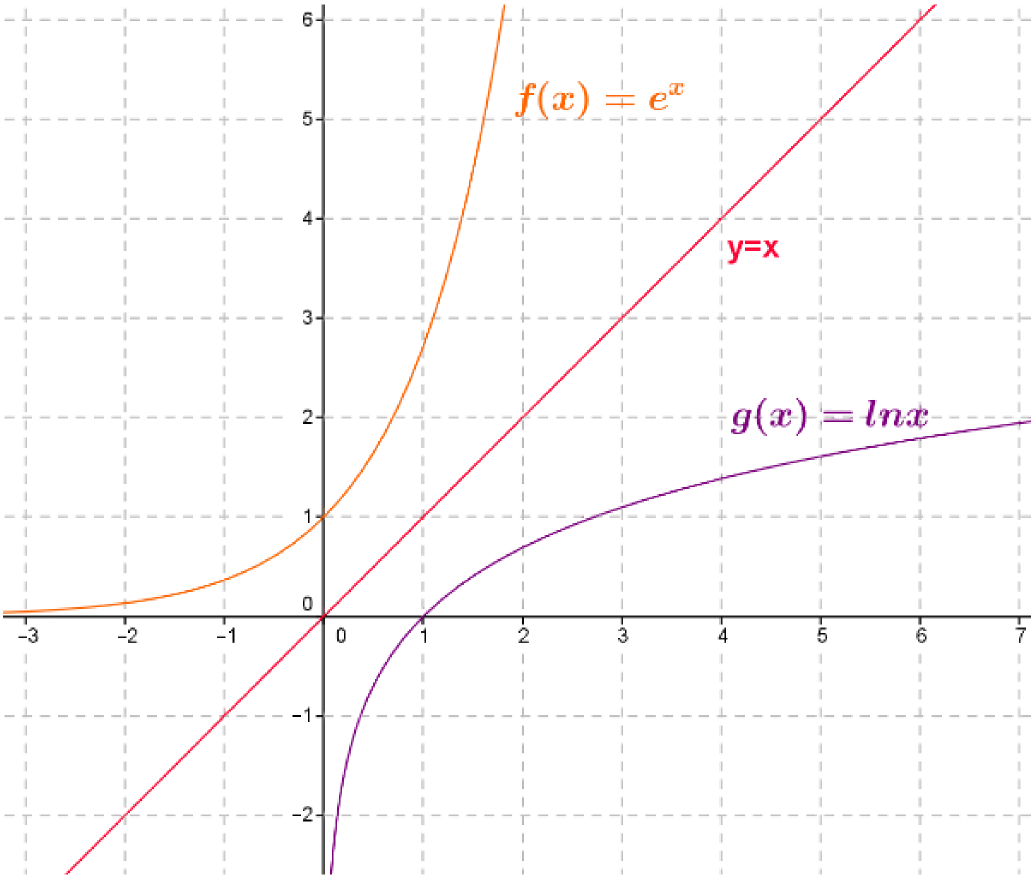
FONCTION LOGARITHME NEPERIEN



Chapitre 6 | Fonction logarithme népérien

Fonction logarithme népérien

I. PRESENTATION DE LA FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

1. Définition

La fonction logarithme népérien est une fonction définie sur $]0;+\infty[$ telle que :

$$x = e^y \Leftrightarrow y = \ln(x)$$

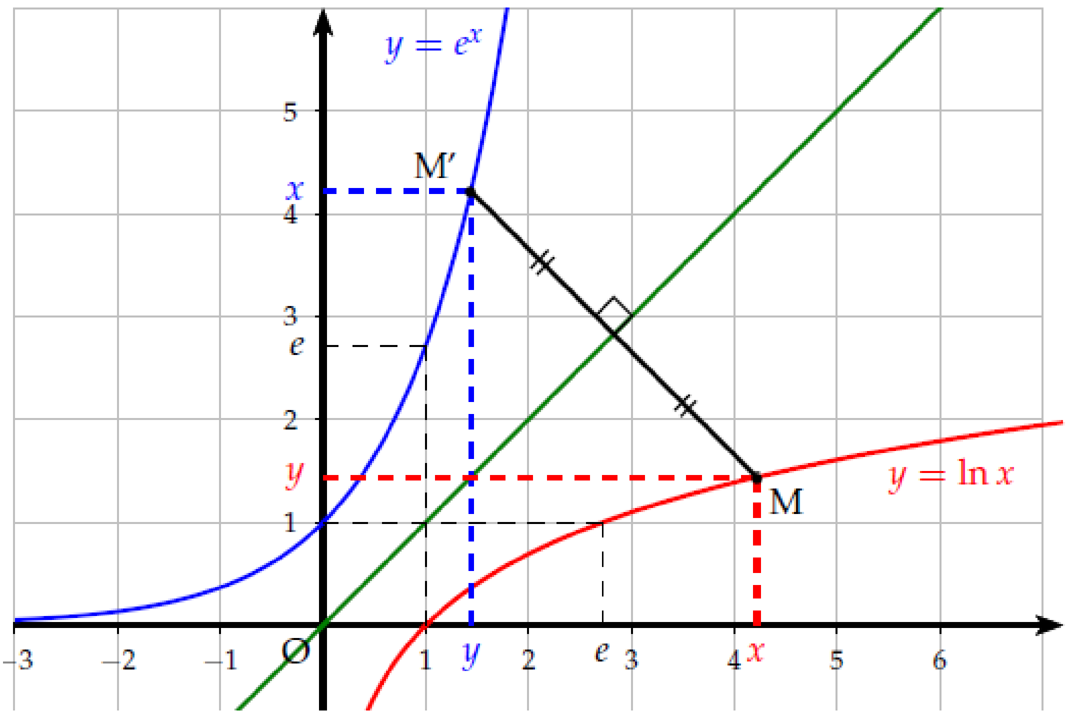
La conséquence immédiate de cette définition est que les fonctions exponentielle et logarithme népérien sont réciproques.

S'en suit alors immédiatement :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$
- $\forall x \in]0;+\infty[\,, e^{\ln(x)} = x$

2. Symétrie

La réciprocité des fonctions exponentielle et logarithme népérien ont pour conséquence directe une symétrie entre leur courbe représentative respective par rapport à la droite d'équation $y = x$:



3. Relation fondamentale de la fonction logarithme népérien

Théorème

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs. On a alors :

$$\mathbf{ln}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \mathbf{ln}(\boldsymbol{a}) + \mathbf{ln}(\boldsymbol{b})$$

Démonstration ROC

Rappel d'une propriété sur la fonction exponentielle : $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

D'une part, nous avons : $e^{\ln(ab)} = ab$

D'autre part, nous avons : $e^{\ln(a)+\ln(b)} = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)} = ab$

Donc : $e^{\ln(ab)} = e^{\ln(a)+\ln(b)} \Leftrightarrow \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

4. Autres propriétés de la fonction logarithme népérien

Soients a et b deux réels strictement positifs

- $ln\frac{a}{b} = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$
- $\ln(a^n) = n \times \ln(a)$ Où n est un entier naturel
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

Démonstration

Démontrons que $ln\frac{a}{b} = \ln(a) - \ln(b)$

D'une part $e^{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{a}{b}$

D'autre part : $e^{\ln(a)-\ln(b)} = \frac{e^{\ln(a)}}{e^{\ln(b)}} = \frac{a}{b}$

Donc : $e^{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} = e^{\ln(a)-\ln(b)} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

Démontrons que $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$

Nous avons déjà démontré que $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$, alors en remplaçant a par 1, on obtient :

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(1) - \ln(b)$$
$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(e^0) - \ln(b)$$
$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$$

Démontrons par récurrence que $\ln(a^n) = n \times \ln(a)$:

Initialisation : au rang $n = 0$, on a d'une part $\ln(a^0) = \ln(1) = 0$

D'autre part $0 \times \ln(a) = 0$.

Donc la proposition est initialisée.

Hérédité : On suppose que la proposition est vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$. On veut démontrer que :

$$\ln(a^{n+1}) = (n+1) \times \ln(a)$$

Par hypothèse de récurrence, on suppose que :

$\ln(a^n) = n \times \ln(a)$ on peut additionner $\ln(a)$ des deux côtés
$\Leftrightarrow \ln(a^n) + \ln(a) = nln(a) + \ln(a)$ on utilise la propriété du produit :
$\Leftrightarrow \ln(a^n \times a) = \ln(a)(n+1)$
$\Leftrightarrow \ln(a^{n+1}) = (n+1)\ln(a)$

Ainsi nous venons de démontrer que la proposition est héréditaire.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(a^n) = n \times \ln(a)$

Démontrons que $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$:

$$\begin{aligned}
&\ln(a) = \ln(\sqrt{a} \times \sqrt{a}) \\
&\Leftrightarrow \ln(a) = \ln(\sqrt{a}) + \ln(\sqrt{a}) \\
&\Leftrightarrow \ln(a) = 2\ln(\sqrt{a}) \\
&\Leftrightarrow \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)
\end{aligned}$$

II. ETUDE DE LA FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

1. Variations de la fonction logarithme népérien

Théorème

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Démonstration

Rappel de seconde : Une fonction f définie sur un intervalle I est croissante si et seulement si :

$$\forall (a; b) \in I^2, a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$$

On considère alors la fonction logarithme népérien définie sur $]0; +\infty[$. Soient $a \in]0; +\infty[$ et $b \in]0; +\infty[$ tels que $a < b$. On a alors :

$$\begin{aligned}
&a < b \\
&e^{\ln(a)} < e^{\ln(b)} \\
&\ln(a) < \ln(b)
\end{aligned}$$

Donc la fonction ln est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

2. Signe de la fonction logarithme népérien

Propriété

La fonction logarithme népérien notée ln est négative sur $]0; 1]$ et positive sur $[1; +\infty[$.

Démonstration

Nous avons déjà démontré que la fonction ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Or nous avons également déjà vu que $\ln(1) = 0$. On en déduit le tableau de signe de ln :

x	0		1		$+\infty$
signe de $f(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	

3. Fonction dérivée de la fonction logarithme népérien

Théorème

La fonction logarithme népérien est dérivable sur son ensemble de définition, c'est-à-dire $]0\,;+\infty[$ et sa dérivée est telle que :

$$ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Démonstration

Rappel : Le nombre dérivé d'une fonction f définie et dérivable en a se calcule avec la formule suivante :

$$f'(a) = \lim_{a \to b} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Alors :

$$\ln'(\mathrm{a}) = \lim_{a \to b} \frac{\ln(b) - \ln(a)}{b - a}$$

On effectue un changement de variable : $b = e^B$ et $a = e^A$:

$$\ln'(\mathrm{a}) = \lim_{A \to B} \frac{\ln(e^B) - \ln(e^A)}{e^B - e^A}$$

$$\ln'(\mathrm{a}) = \lim_{A \to B} \frac{B - \mathrm{A}}{e^B - e^A}$$

$$\ln'(a) = \lim_{A \to B} \frac{1}{\frac{e^B - e^A}{B - \mathrm{A}}}$$

Or, $\lim\limits_{A \to B} \frac{e^B - e^A}{B - \mathrm{A}} = exp'(A) = \exp(A) = e^A$ d'où :

$$\ln'(\mathrm{a}) = \frac{1}{e^A}$$

Or $A = \ln(a)$ car $a = e^A$ d'où :

$$ln'(a) = \frac{1}{e^{\ln(a)}} = \frac{1}{a}$$

4. Limites

On a les limites suivantes :

- $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ croissance comparée.
- $\lim_{x \to 0+} x ln(x) = 0$ croissance comparée.

5. Dérivée de $ln(u)$

Soit x un nombre réel. On pose $f(x) = \ln(u(x))$ où u est définie continue et dérivable et strictement positive. Alors on a :

$$\boxed{f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}}$$

Démonstration