FONCTION EXPONENTIELLE

Table des matières

I. LA FONCTION EXPONENTIELLE

1. Définition et propriétés très importantes

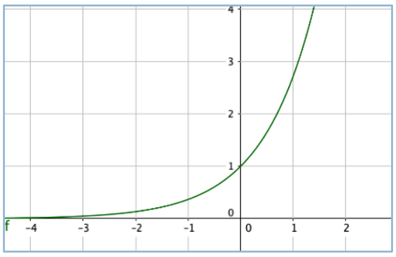
Théorème

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$. On appelle cette fonction la fonction exponentielle et on la note : exp.

Conséquence

$$\boldsymbol{exp(0) = 1}$$

Avec la calculatrice, il est possible de regarder l'allure de la fonction exponentielle :



Comme vous le remarquez, cette fonction semble strictement croissante et strictement positive, deux propriétés que nous démontrerons en aval dans le cours.

2. Relation fonctionnelle fondamentale (par cœur)

Théorème

Soient a et b deux réels, alors :

$$\mathbf{exp}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \mathbf{exp}(\boldsymbol{a}) \times \mathbf{exp}(\boldsymbol{b})$$

Remarque

Cette formule montre que la fonction exponentielle transforme une somme en produit et réciproquement.

3. Autres propriétés extrêmement importantes

Soient a et b deux réels et n un entier naturel, alors on a les relations suivantes :

$$\mathbf{1.}\ \ \mathbf{exp}(-\boldsymbol{a}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{exp}(\boldsymbol{a})} \quad ;\ \mathbf{2.}\ \ \mathbf{exp}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = \frac{\mathbf{exp}(\boldsymbol{a})}{\mathbf{exp}(\boldsymbol{b})} \quad ;\ \mathbf{3.}\ \ \mathbf{exp}(\boldsymbol{na}) = (\mathbf{exp}(\boldsymbol{a}))^{\boldsymbol{n}}$$

Démonstration des propriétés 1 et 2

1) La relation fonctionnelle de la fonction exponentielle nous dit :

$$\exp(a) \times \exp(b) = \exp(a+b)$$

Remplaçons alors a et b respectivement par a et $-a$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}&\exp(a) \times \exp(-a) = \exp\big(a+(-a)\big) = \exp(0) = 1\\&\Leftrightarrow \exp(a) \times \exp(-a) = 1\\&\Leftrightarrow \exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}\end{aligned}$$

2) $\exp(a-b) = \exp\big(a+(-b)\big) = \exp(a) \times \exp(-b) = \exp(a) \times \frac{1}{\exp(b)} = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$

4. Le nombre e

Définition

L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e. On a ainsi $\exp(1) = e$.

Remarque

La calculatrice nous renseigne que $e^1 \approx 2{,}718281828$

5. Notation

La fonction exponentielle possède des propriétés absolument identiques à celles sur les puissances. Exactement comme celles vues en quatrième. C'est la raison pour laquelle, dans un souci de simplification de la notation nous allons désormais noter la fonction exponentielle de la manière suivante :

$$\exp(x) = e^x$$

Toutes les propriétés vues précédemment peuvent donc se noter plus simplement :

$$e^{-a} = \frac{1}{e^a}; \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}\ ; \quad e^{na} = (e^a)^n$$

II. ETUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

1. La fonction exponentielle ne s'annule jamais

Propriété

$$\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R}, e^x \neq 0}$$

Démonstration :

Nous savons que $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \times e^{-x} = 1$. Par l'absurde supposons que $e^x = 0$. Alors on a :

$$\begin{aligned}&0 \times e^{-x} = 1\\&\Leftrightarrow 0 = 1\end{aligned}$$

Ce qui est absurde. On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \neq 0$

2. Son signe

Propriété

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{e^x > 0}$$

Démonstration

Soit $x \in \mathbb{R}$, on peut remarquer que : $\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 = e^{\frac{x}{2}\times 2} = e^x$

On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 0$

Or nous avons déjà démontré que quelque soit $x \in \mathbb{R}$, $e^x \neq 0$. D'où :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{e^x > 0}$$

3. Ses variations

Théorème

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

Soit $x \in \mathbb{R}$, on sait que $exp'(x) = \exp(x) = e^x > 0$

Donc la fonction exponentielle est strictement croissante.

Propriétés :

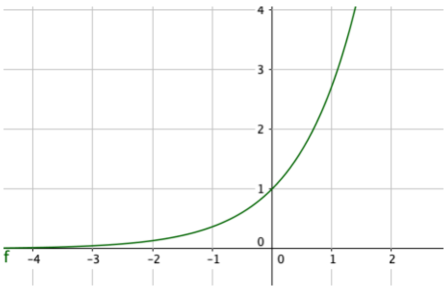
- $e^a = 1 \Leftrightarrow a = 0$
- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
- $e^a > 1 \Leftrightarrow a > 0$
- $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$

4. Courbe représentative

Tableau de variation

x	$-\infty$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	
variations de f	0	$\nearrow$	$+\infty$

Graphe



III. EXPONENTIELLE ET SUITE GEOMETRIQUE

On a vu que pour tout entier n, et tout réel a, on a : $e^{na} = (e^a)^n$

Propriété

La suite $(e^a)^n$ est une suite géométrique de raison e^a et de premier terme 1.

Rappel

Une suite est dite géométrique si et seulement si elle peut se mettre sous la forme $u_n = u_0 \times q^n$. u_0 est appelé le premier terme et q est appelé la raison.

IV. DERIVEE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE COMPOSEE AVEC UNE AUTRE FONCTION U

Propriété très importante

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$. On pose alors la fonction $f(x) = e^{u(x)}$. Alors la dérivée de la fonction f s'écrit :

$$\boldsymbol{f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}}$$