

Fonctions trigonométriques

Le radian et le cercle trigonométrique

EXERCICE 1

Convertir en radians les mesures données en degrés :

$$10^\circ ; 59^\circ ; 180^\circ ; 18^\circ ; 72^\circ ; 112,5^\circ$$

EXERCICE 2

Convertir en degré les mesures données en radians :

$$\frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3} ; \pi ; \frac{5\pi}{4} ; \frac{3\pi}{8} ; \frac{5\pi}{12} ; \frac{3\pi}{2}$$

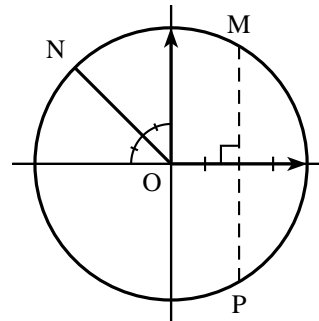
EXERCICE 3

Tracer un cercle trigonométrique puis placer les points images des angles en radians suivants :

$$1) \pi \quad 2) \frac{\pi}{4} \quad 3) \frac{3\pi}{2} \quad 4) \frac{\pi}{6} \quad 5) -\frac{\pi}{3} \quad 6) -\frac{3\pi}{4} \quad 7) \frac{5\pi}{6} \quad 8) -\frac{3\pi}{2}$$

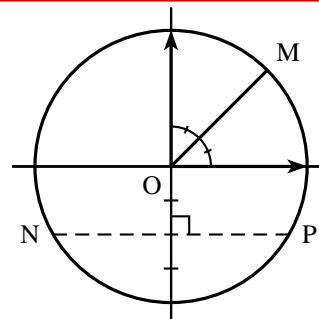
EXERCICE 4

Utiliser les renseignements portés sur la figure pour déterminer les angles sur $[0 ; 2\pi]$ repérant les points M, N et P.



EXERCICE 5

Utiliser les renseignements portés sur la figure pour déterminer les angles sur $[-\pi ; \pi]$ repérant les points M, N et P.



EXERCICE 6

Sur le cercle trigonométrique colorier les arcs décrits par les intervalle I, J et K tels que :

$$I = \left[-\frac{\pi}{4} ; \frac{5\pi}{4} \right] ; \quad J = \left[\frac{4\pi}{3} ; \frac{13\pi}{6} \right] ; \quad K = \left[-\frac{7\pi}{6} ; \frac{5\pi}{4} \right]$$

Angle dans $] -\pi ; \pi]$

EXERCICE 7

Dans chaque cas, trouver l'angle x dans $] -\pi ; \pi]$ correspondant à l'angle α donné :

$$1) \alpha = \frac{7\pi}{2} \quad 2) \alpha = -\frac{4\pi}{3} \quad 3) \alpha = \frac{35\pi}{6} \quad 4) \alpha = -\frac{21\pi}{4} \quad 5) \alpha = \frac{202\pi}{3}$$

Lignes trigonométriques

EXERCICE 8

Trouver les valeurs exactes du cosinus, sinus puis de la tangente des réels donnés. Vous pourrez commencer par placer les points sur le cercle trigonométrique.

$$1) \frac{\pi}{6} \quad 2) \frac{5\pi}{6} \quad 3) \frac{7\pi}{6} \quad 4) \frac{11\pi}{6} \quad 5) \frac{13\pi}{6}$$

EXERCICE 9

Trouver les valeurs exactes du cosinus, sinus puis de la tangente des réels donnés. Vous pourrez commencer par placer les points sur le cercle trigonométrique.

$$1) \frac{\pi}{4} \quad 2) \frac{9\pi}{4} \quad 3) \frac{5\pi}{4} \quad 4) \frac{81\pi}{4} \quad 5) -\frac{108\pi}{4}$$

EXERCICE 10

Trouver les valeurs exactes du cosinus, sinus puis de la tangente des réels donnés. Vous pourrez commencer par placer les points sur le cercle trigonométrique.

$$1) \frac{4\pi}{3} \quad 2) \frac{\pi}{3} \quad 3) \frac{71\pi}{3} \quad 4) \frac{97\pi}{3} \quad 5) -\frac{54\pi}{3}$$

Relations trigonométriques

EXERCICE 11

À l'aide de la formule $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

- 1) Déterminer $\cos x$ sachant que : $\sin x = \frac{2}{3}$ et $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
- 2) Déterminer $\sin x$ sachant que : $\cos x = -\frac{1}{5}$ et $x \in [-\pi; 0]$
- 3) Déterminer $\cos x$ sachant que : $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$ et $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

EXERCICE 12

Dans chacun des cas suivants, calculer $\cos x$ ou $\sin x$.

- 1) $\sin x = -\frac{1}{4}$ et $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.
- 2) $\cos x = \frac{3}{5}$ et $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.
- 3) $\cos x = -\frac{1}{3}$ et $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

EXERCICE 13

Démontrer que pour tout réel x on a :

- 1) $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$
- 2) $(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2 = 4 \cos x \sin x$

EXERCICE 14

Exprimer à l'aide de $\sin x$ et $\cos x$, les expressions suivantes :

- 1) $\sin(-x) + \cos(-x)$
- 2) $\sin(-x) - \sin(\pi + x)$
- 3) $\cos(\pi - x) + \cos(3\pi + x)$
- 4) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 3 \cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) - 4 \sin(\pi - x)$

Équations trigonométriques**EXERCICE 15**

À l'aide d'un cercle trigonométrique, résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

- 1) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- 2) $\sin x = 0$
- 3) $2 \sin x + \sqrt{3} = 0$

EXERCICE 16

Résoudre dans \mathbb{R} puis visualiser les solutions dans le cercle trigonométrique des équations suivantes :

- 1) $2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$
- 2) $1 - \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$
- 3) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$
- 4) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

EXERCICE 17

Résoudre dans \mathbb{R} puis visualiser les solutions dans le cercle trigonométrique des équations suivantes :

- 1) $\cos 2x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
- 2) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$
- 3) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
- 4) $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

EXERCICE 18

Calcul de $\sin \frac{\pi}{8}$ et $\cos \frac{\pi}{8}$

\mathcal{C} est le cercle trigonométrique associé à un repère orthonormé direct (O, I, J) du plan. M est le point de \mathcal{C} tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{4}$.

- 1) Faire une figure.
- 2) Quelles sont les coordonnées du point M dans le repère (O, I, J) ?

- 3) Calculer la distance IM.
- 4) a) Démontrer que : $IM = 2 \times \sin \frac{\pi}{8}$.
- b) En déduire la valeur exacte de $\sin \frac{\pi}{8}$.
- 5) Calculer la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{8}$.
- 6) Déduire les lignes trigonométriques de : $\frac{7\pi}{8}$, $\frac{9\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{8}$ et $\frac{3\pi}{8}$.

EXERCICE 19

Calcul de $\sin \frac{\pi}{12}$ et $\cos \frac{\pi}{12}$

\mathcal{C} est le cercle trigonométrique associé à un repère orthonormé direct (O, I, J) du plan.
M est le point de \mathcal{C} tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{6}$.

- 1) Faire une figure
- 2) Quelles sont les coordonnées du point M dans le repère (O, I, J) ?
- 3) Calculer la distance IM.
- 4) a) Démontrer que : $IM = 2 \times \sin \frac{\pi}{12}$.
- b) En déduire la valeur exacte de $\sin \frac{\pi}{12}$.
- c) Montrer que l'on peut mettre $\sin \frac{\pi}{12}$ sous la forme $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$
- 5) a) Calculer la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$.
- b) Montrer que l'on peut mettre $\cos \frac{\pi}{12}$ sous la forme $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$
- 6) Déduire les lignes trigonométriques de : $\frac{11\pi}{12}$, $\frac{13\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$ et $\frac{7\pi}{8}$.

Études de fonctions

EXERCICE 20

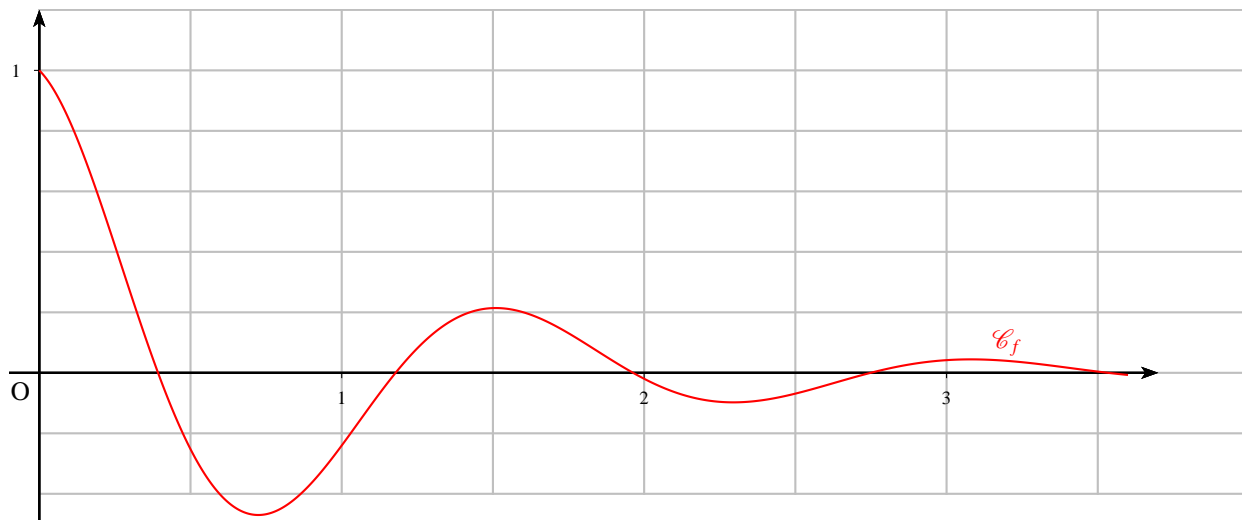
f est la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{2}{2 + \cos x}$

- 1) Justifier que la fonction f est définie sur \mathbb{R} .
- 2) Montrer que la fonction f est paire et 2π -périodique.
En déduire le plus petit intervalle d'étude de la fonction f .
- 3) Calculer la fonction dérivée f' et déterminer son signe sur l'intervalle $[0; \pi]$.
- 4) Dresser le tableau de variation de f sur $[-\pi; \pi]$ et tracer l'allure de la fonction sur $[-\pi; 3\pi]$

EXERCICE 21

Soit les fonctions f et g définies sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = e^{-x} \cos(4x)$ et $g(x) = e^{-x}$.

On a tracé \mathcal{C}_f ci-dessous, la courbe représentative de la fonction f .



- 1) a) Montrer que : $\forall x \in [0 ; +\infty[$, $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$.
 b) Que peut-on conjecturer pour les grandes valeurs de x ?
- 2) Déterminer les coordonnées des points communs aux courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .
- 3) On définit la suite (u_n) sur \mathbb{N} par $u_n = f\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.
 a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. En préciser la raison.
 b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) et étudier sa convergence.
- 4) a) Montrer que : $\forall x \in [0 ; +\infty[$, $f'(x) = -e^{-x} [\cos(4x) + 4 \sin(4x)]$.
 On rappelle que $[\cos(ax + b)]' = -a \sin(ax + b)$.
 b) En déduire que les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g ont même tangente en chacun de leurs points communs.
- 5) Donner une valeur approchée à 10^{-1} près par excès du coefficient directeur de la droite (T) tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.
 Compléter le graphique ci-dessous en y traçant (T) et \mathcal{C}_g .

EXERCICE 22**La fonction tangente**

Soit la fonction tangente, notée \tan , définie sur $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ par : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

- 1) Expliquer pourquoi la fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$.
- 2) a) Montrer que la fonction tangente est impaire et π -périodique.
 b) En déduire le plus petit intervalle d'étude de la fonction tangente.
- 3) a) Montrer que la dérivée de la fonction tangente sur l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$ peut se mettre sous la forme : $\tan' x = 1 + \tan^2 x$.
 b) Que peut-on en déduire sur les variations de la fonction tangente sur $\left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$.

- 4) Déterminer la tangente (T_0) en 0 puis tracer la fonction tangente et (T_0) sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.

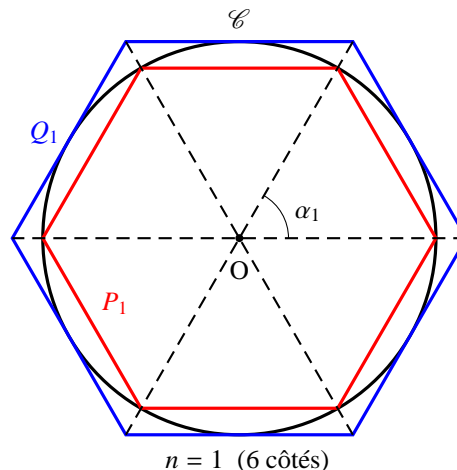
EXERCICE 23

Approximation de π par la méthode d'Archimède.

Dans un texte intitulé « *De la mesure du cercle* », Archimède imagine la première méthode jamais proposée permettant, en théorie, le calcul de π avec une précision aussi grande qu'on le souhaite.

Soit \mathcal{C} un cercle de rayon 1 : on construit, pour $n \geq 1$ deux polygones réguliers P_n , et Q_n , ayant 3×2^n côtés, P_n étant inscrit dans \mathcal{C} , et Q_n , exinscrit à \mathcal{C} (voir la figure ci-contre).

Le périmètre du cercle ($= 2\pi$) est encadré par ces deux polygones. On note p_n et q_n , les demi-périmètres respectifs de P_n et Q_n . Ainsi, $p_n < \pi < q_n$



- 1) Le cas $n = 1$

Montrer que $p_1 = 3$ et $q_1 = 2\sqrt{3}$.

- 2) Expression de p_n , et q_n

- a) Évaluer l'angle au centre α_n qui intercepte l'un des côtés de P_n en fonction de n .
 b) En déduire les relations : $p_n = 3 \times 2^n \sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$ et $q_n = 3 \times 2^n \tan\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$.

En pratique, ces expressions ne permettent pas un calcul numérique de p_n et q_n .

Dans la suite, nous nous orientons vers un calcul de proche en proche.

- 3) Relations de récurrence

a) On pose $\beta_n = \frac{\pi}{3 \times 2^{n+1}}$. Exprimer p_n et q_n , en fonction de n et β_n .

b) On admet que : $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ et $1 + \cos 2a = \cos^2 a$

En déduire que, $\forall n \geq 1$, $\frac{1}{q_{n+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p_n} + \frac{1}{q_n} \right)$ et $p_{n+1} = \sqrt{p_n q_{n+1}}$

c) Calculer q_2 et p_2 à l'aide des relations précédentes.

Quelle est la précision sur la valeur approchée de π ?

- 4) Algorithme.

- a) Proposer un algorithme permettant de calculer les valeurs de p_n et q_n jusqu'à obtenir un encadrement de n d'amplitude 10^{-6} . Donner l'encadrement de π ainsi obtenu.
 b) Proposer une fonction en Python qui donne le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir un encadrement à 10^{-p} du nombre π , $p \in \mathbb{N}$. Quel est le nombre d'itérations nécessaires pour fournir 3 décimales supplémentaires ? Cet algorithme est-il efficace pour connaître les décimales de π ?