04/01/20.

Correction du Bac Blanc.

Ex n°1 :

1) Soit $x \in \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x \iff x - \ln(x^2+1) = x$

$\iff -\ln(x^2+1) = 0.$

$\iff \ln(x^2+1) = 0$

On applique la f° exp définie sur $\mathbb{R}$ $\iff e^{\ln(x^2+1)} = e^0$

$\iff x^2+1 = 1$

$\iff x^2 = 0.$

$\iff x = 0.$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$, on dérive la f° f :

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2+1-2x}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}.$$

Or $(x-1)^2 \geq 0$ et pour $x = 1$, on a $(1-1)^2 = 0$ d'où le signe de $f'(x)$ dans le tableau. On en déduit que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 \leq x \leq 1$

On applique f st croissante sur $\mathbb{R}$ $\quad f(0) \leq f(x) \leq f(1).$

$0 - \ln(0^2+1) \leq f(x) \leq 1 - \ln(1^2+1)$

$0 \leq f(x) \leq 1 - \ln(2) < 1.$

4) a) Il applique le plus petit entier naturel N tel que $f(N) \geq A$.

b) D'après la calculatrice on a $N = 110$.

Partie B: (P_n): $0 \leq u_n \leq 1$.

1) Initialisation: Soit $n=0$, $u_0=1$ Or $0 \leq 1 \leq 1$ donc P_0 est vrai.

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $0 \leq u_n \leq 1$, m.q: $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.

$$0 \leq u_n \leq 1$$

Or nous avons montré que si $x \in [0;1]$, $f(x) \in [0;1]$, donc :

$$0 \leq f(u_n) \leq 1.$$
$$0 \leq u_{n+1} \leq 1.$$

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n - \ln(u_n^2+1) - u_n = -\ln(u_n^2+1)$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_n^2+1 \geq 1$$
on applique ln st ↗ sur $]0;+\infty[$.
$$\ln(u_n^2+1) \geq 0$$
$\times(-1)$
$$-\ln(u_n^2+1) \leq 0.$$

On a donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ donc (u_n) est ↘.

3) (u_n) est décroissante et minorée donc convergente.

4) $f(\ell) = \ell \iff f(x) = x$

$\iff x = 0$ donc $\ell = 0$.

Ex n°2 :

Partie A :

1) $a_0 = 1$ et $b_0 = 1$

2) $z_1 = \dfrac{z_0 + |z_0|}{3} = \dfrac{1+i+\sqrt{2}}{3} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{3} + \dfrac{1}{3} i.$

d'où $a_1 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$ et $b_1 = \dfrac{1}{3}$.

3)a)

K	A	B
1	$\frac{1+\sqrt{2}}{3}$	$\frac{1}{3}$
2		$\frac{1}{9}$

$\dfrac{1+\sqrt{1^2+1^2}}{3} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{3}.$

$\dfrac{1+\sqrt{2}}{3} + \sqrt{\left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2}$

b) a_N.

Partie B :

1) $z_{n+1} = \dfrac{a_n + i b_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{3}$

$a_{n+1} = \dfrac{a_n + \sqrt{a_n^2+b_n^2}}{3}$ $\qquad b_{n+1} = \dfrac{b_n}{3}.$

2) (b_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de 1er terme 1.

Comme $\frac{1}{3} \in]-1;1[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$

3) a) $|z_{n+1}| = \left|\dfrac{z_n+|z_n|}{3}\right| \leq \left|\dfrac{z_n}{3}\right| + \left|\dfrac{z_n}{3}\right| = \dfrac{|z_n|+|z_n|}{3}$

$= \dfrac{2\,|z_n|}{3}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n = |z_n|$. M.q $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \sqrt{2}$. (P_n)

Initialisation : au rang $n=0$, on a : $u_0 = |z_0| = |1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

et $\left(\frac{2}{3}\right)^0 \times \sqrt{2} = \sqrt{2}$.

Donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \sqrt{2}$

M.q $u_{n+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \times \sqrt{2}$.

$u_{n+1} = |z_{n+1}| \leq \frac{2}{3}|z_n|$

Or $u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \sqrt{2}$. $\quad \times \frac{2}{3}$ et $|z_n| = u_n$.

$\frac{2}{3} u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \times \sqrt{2}$.

$\frac{2}{3}|z_n| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \times \sqrt{2}$ Par transitivité on a:

$u_{n+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \times \sqrt{2}$. (P_n) est héréditaire.

CCL: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \sqrt{2}$.