22/01/20.

$\boxed{\text{Suites numériques}}$

Exemple. $\begin{cases} U_{n+1} = U_n + 2n+1. \\ U_0 = 0. \end{cases}$

Calculer U_1 ; U_2 et U_3.

Exemple $U_n = 2n+3.$ $\qquad U_{n+1} = 2(n+1)+3$

$$U_{n+1} - U_n = 2(n+1)+3 - (2n+3).$$

$$= \cancel{2n} + 2 \cancel{+3} - \cancel{2n} \cancel{-3}. = 2 > 0$$

Donc (U_n) est croissante.

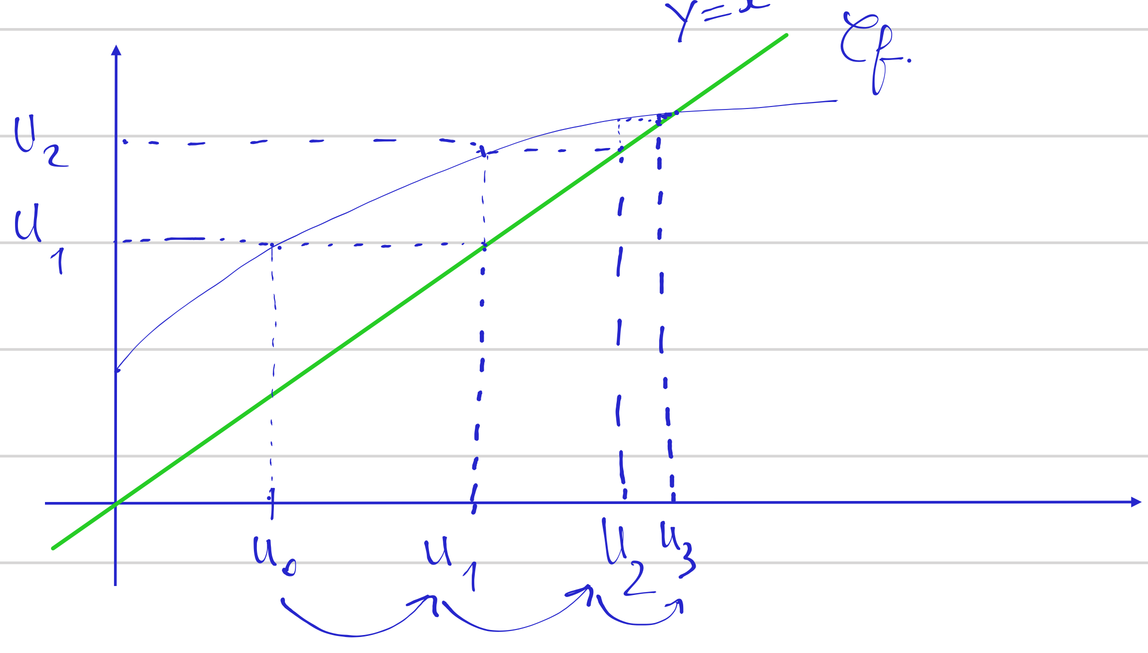
Exemple. $\boxed{U_n = 2^n.}$ $\qquad U_{n+1} - U_n = 2^{n+1} - 2^n.$ ~~X~~.

$$\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}.$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2^{\cancel{n}+1-\cancel{n}} = 2^1$$

$$= 2. > 1.$$

Représentation graphique d'une suite définie par récurrence:



Soit (U_n) une suite définie par récurrence.

$$\begin{cases} U_{n+1} = f(U_n) \\ U_0 : \text{donné} \end{cases}$$

$$U_1 = f(U_0).$$

$$U_2 = f(U_1)$$

$u_3 = f(u_2)$.

Ici on peut conjecturer que (u_n) est croissante.
et qu'elle tend vers une limite finie notée l.

IV- limites :

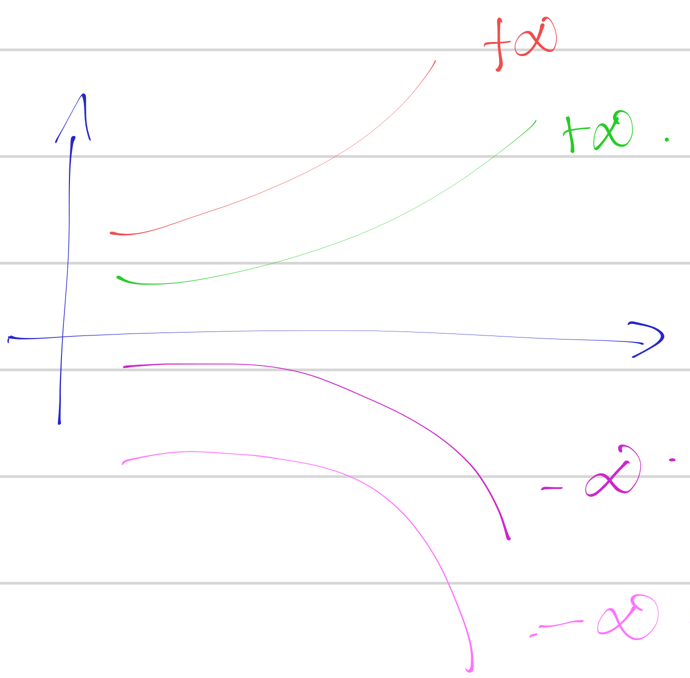
$*_1$ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$?

Lorsque $n \to +\infty$, u_n augmente et peut dépasser n'importe quelle valeur en restant au-dessus.

$*_2$ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

$*_3$ $\lim\limits_{n \to +\infty} = l \in \mathbb{R}$

$*_4$ la limite n'existe pas.
Ex : $u_n = \cos(n)$



Théorème des gendarmes :

$v_n \leq u_n \leq w_n$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = a$.

Ex : Déterminer la limite de $\dfrac{\cos(n)}{n}$ en $+\infty$.

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\cos(n)}{n}$. (On sait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \cos(n) \leq 1$.)

$-1 \leq \cos(n) \leq 1$.

$\dfrac{-1}{n} \leq \dfrac{\cos(n)}{n} \leq \dfrac{1}{n}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-1}{n} = 0$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\cos(n)}{n} = 0$.

- Pour tout entier naturel k non nul on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = \cancel{0}\ +\infty$.

Exercice 14 —

1) $u_n = \dfrac{2n+5}{3n-2}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (2n+5) = +\infty$. Une forme indéterminée.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 3n-2 = +\infty$.

On lève l'indéterminée : $u_n = \dfrac{\cancel{n}(2+\frac{5}{n})}{\cancel{n}(3-\frac{2}{n})}$.

$u_n = \dfrac{2+\frac{5}{n}}{3-\frac{2}{n}}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2+\frac{5}{n} = 2$.

et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3-\frac{2}{n} = 3$.

Par quotient de limites, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}.}$

$w_n = \underset{\ell}{\underset{\downarrow}{u_n}} + \underset{\ell'}{\underset{\downarrow}{v_n}}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell+\ell'$.

2) $u_n = \frac{n}{4} - 2 + \frac{2n}{n^2+5}$

ℓ -2 ℓ' 0

$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{4} - 2 = -2.$

$\frac{2n}{n^2+5} = \frac{n \times 2}{n^2\left(1+\frac{5}{n^2}\right)} = \frac{2}{n\left(1+\frac{5}{n^2}\right)}$

$\lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{5}{n^2} = 1.$

$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty.$

Par produit, $\lim_{n \to +\infty} n\left(1+\frac{5}{n^2}\right) = +\infty.$

Par quotient, $\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n\left(1+\frac{5}{n^2}\right)} = 0.$ Par somme de limites, on a :

$\lim_{n \to +\infty} u_n = -2.$