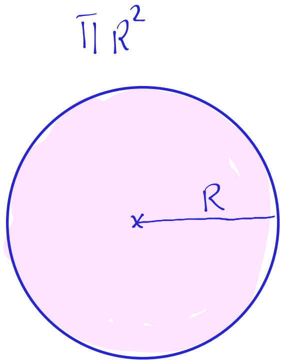
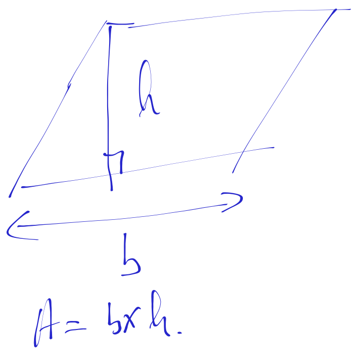
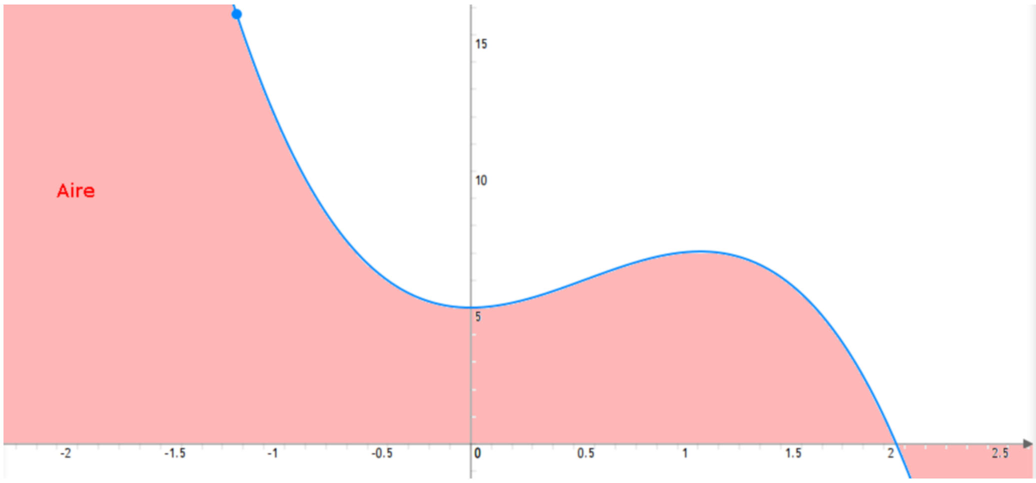
INTEGRALES, PRIMITIVES INTRODUCTION







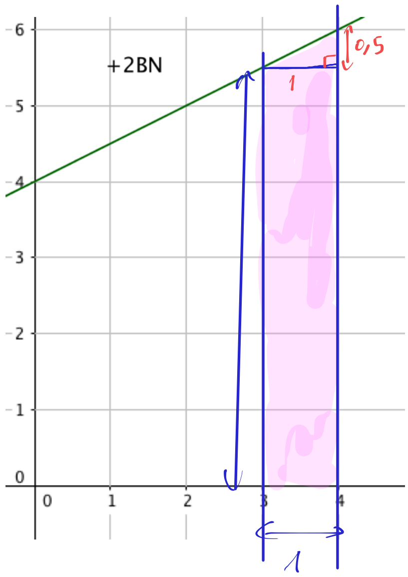
Chapitre X

Activité introductive

L'objectif de cette activité est de rechercher et trouver une méthode qui permet de déterminer approximativement puis avec exactitude, l'aire sous une courbe.

I. Etude d'un cas particulier

Soit $f(x)$ une fonction définie sur l'ensemble des réels par $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$. Déterminez alors l'aire délimitée par les droites d'équation $x = 3$, $x = 4$, l'axe des abscisses et C_f. Bien sûr il est judicieux de tracer les droites en question pour se rendre bien compte de ce qu'on doit calculer. $f(3) = \frac{1}{2} \times 3 + 4 = 5{,}5.$



Remarque

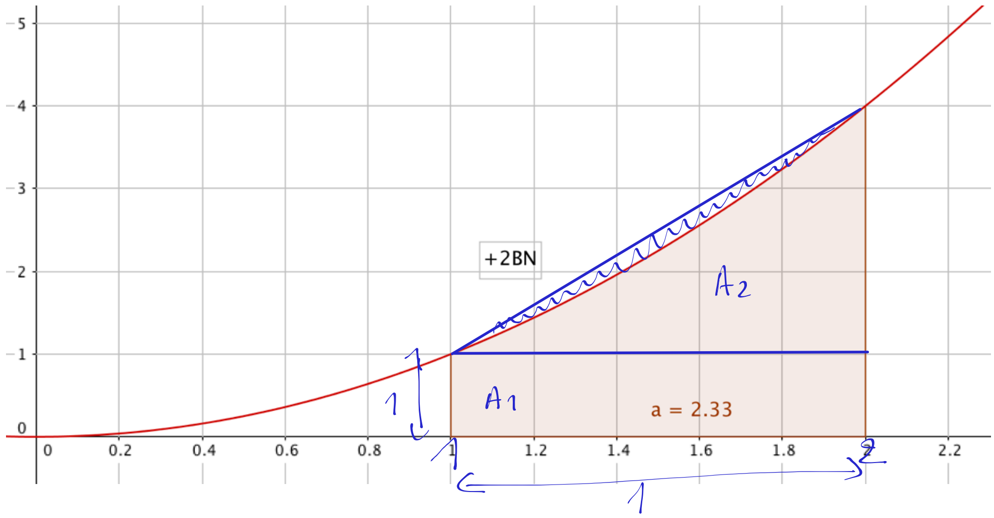
On se rend très vite compte des limites de cette méthode exacte qui ne va fonctionner que pour calculer l'aire située en dessous des droites. Aire du rectangle : $5{,}5 \times 1 = 5{,}5$ u.a.

Aire du triangle : $\frac{1 \times 0{,}5}{2} = 0{,}25$ u.a.

Aire totale : $5{,}5 + 0{,}25 = 5{,}75$ u.a

II. Etude d'un cas où la fonction est une courbe

Soit f la fonction carrée définie sur $\mathbb{R}$. On a alors $f(x) = x^2$ dont voici la courbe représentative :



L'objectif ici est de calculer l'aire colorée en marron que vous voyez sur le graphique. Proposez une méthode. Vous pourrez dessiner sur le graphique proprement et expliquer votre méthode ci-dessous :

On partage l'aire coloriée en deux :

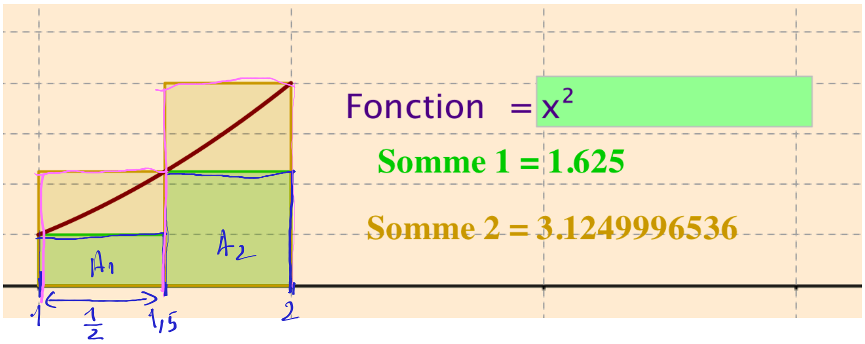
$A_1 = 1 \times 1 = 1$ u.a.

$A_{tot} = 1 + 1{,}5 = 2{,}5$ u.a.

$A_2 = \frac{1 \times 3}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

Méthode des rectangles

Pour essayer de trouver la meilleure approximation possible de cette aire qu'on recherche, je vous propose ici de diviser l'intervalle $[1; 2]$ en $n = 2$ morceaux, puis de construire les rectangles associés comme cela :



Ici chaque rectangle a une largeur égale à $\frac{1}{2}$. Pour calculer la longeur des rectangles il suffit de calculer l'image parla fonction f. Ensuite on calcule l'aire des rectangles en appliquant facilement la formule $A = l \times L$. C'est ce que le logiciel fait pour Somme 1 et Somme 2.

Comme vous le remarquez, l'aire Somme 2 est plus grande que l'aire sous la courbe car tous les rectangles correspondants sont au-dessus de la courbe.

De même, l'aire Somme ~~2~~ 1 est plus petite que l'aire sous la courbe car tous les rectangles verts correspondants sont en-dessous de la courbe.

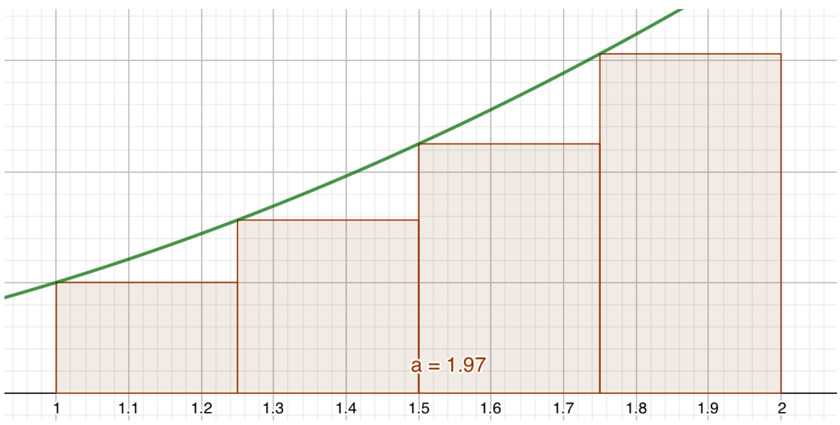
En réalité Somme 1 et Somme 2 permettent d'avoir un encadrement de la véritable aire sous la courbe :

$$\textit{Somme 1} \leq \textit{Aire sous la courbe} \leq \textit{Somme 2}$$

Remarque

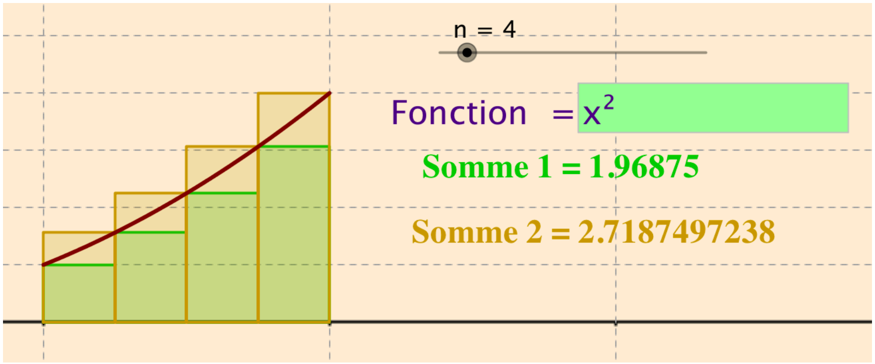
Cette méthode est limitée car elle permet seulement d'avoir un encadrement qui de surcroît, est trop large. Que proposez-vous de faire pour améliorer cette première approximation ? Ecrivez la réponse en-dessous en faisant un schéma.

Pour optimiser cette méthode, on peut construire plus de rectangles au lieu d'en faire 2 seulement. Par exemple avec 4 rectangles on a :

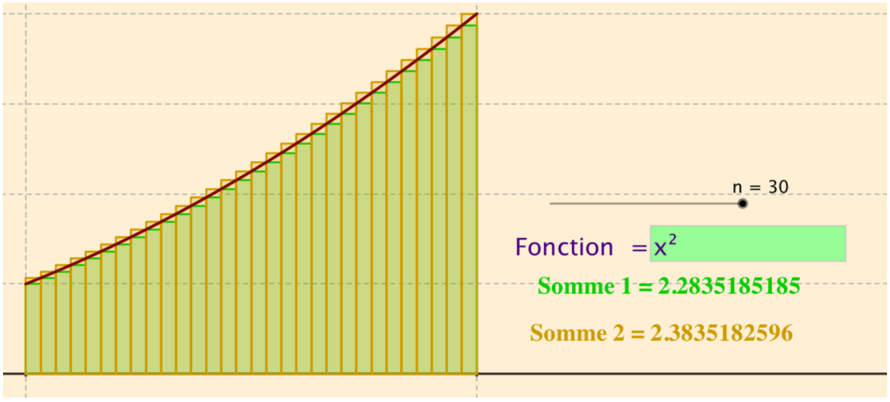


Optimisation de cette méthode

Pour améliorer l'encadrement de l'aire sous la courbe, en effet, on peut tout simplement augmenter le nombre de rectangles ; ici le même procédé a été répété pour $n = 4$. Comme vous le voyez, rien qu'à l'œil nu, on s'aperçoit que l'aire Somme 1 et Somme 2 se rapprochent davantage de la vraie aire sous la courbe.



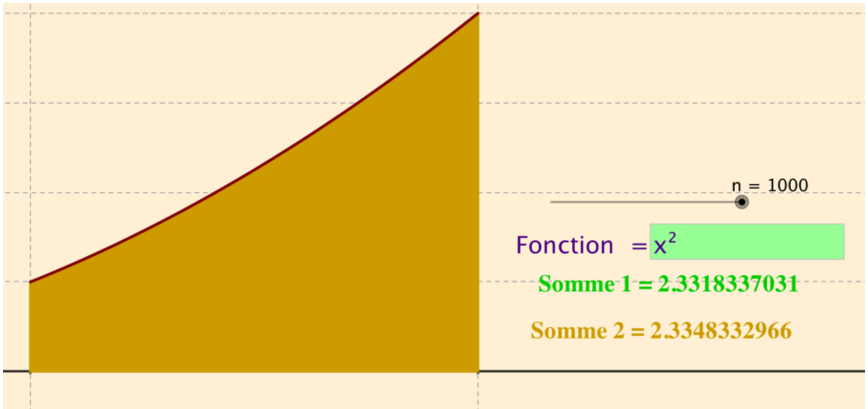
Pas convaincu ? Prenons $n = 30$. C'est-à-dire qu'on partage l'intervalle $[1;2]$ en 30 morceaux de longueur $\frac{1}{30}$:



Lorsqu'on augmente la valeur de n les valeurs Somme 1 et Somme 2 varient de moins en moins. Elles semblent tendre vers une valeur limite.

A votre avis laquelle ?

Regardez ce qu'on obtient pour $n = 1000$:



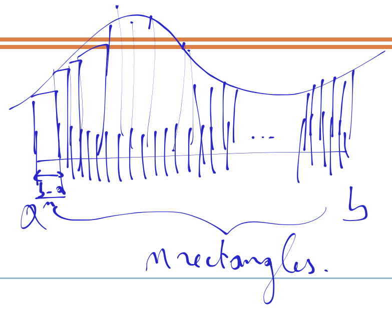
Somme 1 et somme 2 sont égales à 10^{-2} près.

D'ailleurs on retrouve bien l'aire trouvée dans le I.

III. Formalisation mathématique

Cette méthode des rectangles consiste en fait à partager un intervalle $[a;b]$ en n morceaux et à construire n rectangles comme on a vu précédemment. Enfin, on réalisait la somme des aires de ces rectangles.

$$A(x) = \overset{\int}{\sum_{k=1}^{n}} \overbrace{f\left(a + k\times\frac{\mathrm{b}-\mathrm{a}}{n}\right)}^{f(x)} \times \overbrace{\frac{\mathrm{b}-\mathrm{a}}{n}}^{dx}$$



1 6.

Pour que $A(x)$ tende vers la valeur exacte de l'aire sous la courbe, il faut que n tende vers l'infini. Alors la somme qui était jusqu'à présent discrète devient continue. Dès lors les notations changent car on passe du monde discret au monde continu :

S $\int$ longueur du rectangle L largeur

$$A_{exacte}(x) = \int_a^b \overbrace{f(x)}^{L} \overbrace{dx}^{l}$$

Remarque

Il s'agit vraiment de la même somme que précédemment, la seule chose qui change c'est que cette dernière est continue.

- $\int$ correspond à $\sum$
- $f(x)$ correspond à la longueur du rectangle
- dx correspond à la largeur du rectangle.
- On lit alors intégrale de a à b de $f(x)dx$

Vérification. $(x^2)' = 2x.$ $(x^3)' = 3x^2$

IV. Comment calculer cette intégrale ?

Revenons dans notre exemple où $f(x) = x^2$

$\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = \frac{1}{\cancel{3}} \times \cancel{3}x^2$ $x^2.$

Calculer une fonction $F(x)$ telle que $F'(x) = f(x)$. F est alors une primitive de f.

$F(x) = \frac{1}{3}x^3$ (primitive) $F \longrightarrow f \xrightarrow{\text{dérive}} f'$ (f dérivée)

Calculer maintenant $F(2) - F(1)$ en donnant la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2}.

$F(2) - F(1) = \frac{1}{3} \times 2^3 - \frac{1}{3} \times 1^3 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \simeq 2,33$ à 10^{-2}.

Conclure. F(2)-F(1) semble être égal à l'aire sous la courbe Cf entre les droites d'éq° $x=1$ et $x=2$.

Finalement on a :

$$\boxed{\int_1^2 x^2 dx = \frac{7}{3}}$$