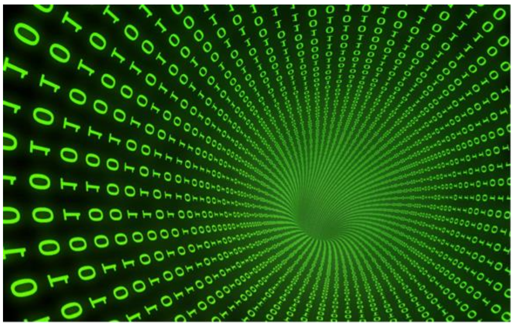
+2BN

MATRICES



Chapitre 2

Matrice

L'objectif de ce cours est de résoudre des problèmes anciens et nouveaux à l'aide d'un nouvel outil puissant : les matrices

Matrices

I. DEFINITION ET OPERATION SUR LES MATRICES

1. Définition

Une matrice est tableau de nombres défini par son nombre de lignes et son nombre de colonne. On note :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Explications

Les nombres a_{ij} sont appelés coefficients de la matrice M. Le nombre a_{ij} est situé à la $i^{ème}$ ligne et à la $j^{ème}$ colonne.

Exemple

Vocabulaire

- Si la matrice n'est constituée que d'une seule colonne c'est-à-dire $m = 1$, on dit que la matrice est un vecteur colonne.
- Si le nombre de colonne et le nombre de lignes sont identiques, c'est-à-dire $n = m$, alors on dit que la matrice est carrée d'ordre m.
- On dit qu'une matrice carrée est symétrique si et seulement si ses coefficients sont symétriques par rapport à la diagonale : $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. On note alors $\forall i \neq j, a_{ij} = a_{ji}$. Remarque : les nombres sur la diagonale peuvent être égaux à n'importe quel nombre.

- La matrice identité ou unité est une matrice carrée qui a uniquement des 1 sur sa diagonale et des 0 ailleurs : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On la note I_m où m est l'ordre de la matrice.

- La matrice diagonale d'ordre m est une matrice carrée d'ordre m dont les coefficients situés ailleurs que sur la diagonale sont nuls : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- Une matrice triangulaire d'ordre m est une matrice carrée d'ordre m dont tous les coefficients situés en dessous ou au-dessus de la diagonale **sont nuls** :
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

2. Opération sur les matrices

1. L'ADDITION

Dans le calcul matriciel on n'a le droit d'additionner ou de soustraire uniquement des matrices de mêmes dimensions. Pour additionner ou soustraire deux matrices, il suffit d'additionner ou soustraire chaque coefficient de la matrice.

Exemple

2. LA MULTIPLICATION PAR UN REEL

Soit A une matrice. Le produit de A par un réel k donne une matrice B dont tous les coefficients seront égaux à ceux de A multipliés par k.

Exemple

3. MULTIPLICATION DE DEUX MATRICES

Soient $A(m \times n)$ et $B(n \times p)$ deux matrices. Leur produit donne une matrice $C(m \times p)$ dont chaque coefficient sera égal au produit scalaire des lignes de $A(m \times n)$ avec les colonnes de $B(n \times p)$.

Exemple

Remarque

Le nombre de colonnes de la première matrice doit toujours être égal au nombre de lignes de la deuxième matrice. Si non on ne peut pas faire le produit matriciel.

Conséquences

- Le produit matriciel est associatif : $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
- Distributif sur l'addition : $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$

- **NON COMMUTATIF : $AB \neq BA$**

Exemple

4. TRANSPOSEE D'UNE MATRICE

Soit $M(m \times n)$ une matrice. Alors la transposée de M, notée ${}^{t}M$, est une matrice de dimensions $(n \times m)$ dont les colonnes et les lignes ont été inversées par rapport à la matrice M.

Exemple

II. L'INVERSE D'UNE MATRICE

1. Définition

On dit qu'une matrice carrée M est inversible si et seulement si il existe une autre matrice carrée notée M^{-1} telle que

$$\boldsymbol{M^{-1} \times M = M \times M^{-1} = I} \text{ où } \boldsymbol{I} \text{ est la matrice identité}$$

Exemple

2. Déterminant d'une matrice d'ordre 2

Définition

Soit A une matrice carrée d'ordre 2, on appelle déterminant de la matrice A, noté $\det(M)$ le nombre réel tel que :

$$\text{Si } \boldsymbol{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \text{ on a : } \boldsymbol{\det(M) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb}$$

Théorème

On dit qu'une matrice carrée d'ordre 2 est inversible si et seulement si le déterminant de cette matrice est différent de 0. De plus on a :

$$\boldsymbol{M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

Démonstration

III. PUISSANCE D'UNE MATRICE

1. Définition

On a :

$$M^n = M \times M \times M \times M \times \dots \times M \text{ (} n \text{ fois)}$$

Exemple

2. Diagonalisation de matrice carrée d'ordre 2

Soit A une matrice carrée d'ordre 2. On dit que A est diagonalisable s'il existe une matrice carrée P d'ordre 2 et inversible telle que :

$$A = PDP^{-1} \text{ où D est une matrice diagonale}$$

De plus cette égalité implique que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

Remarque

Il est très compliqué de calculer la puissance $n^{\text{ème}}$ d'une matrice lorsque n devient grand. Si A est diagonalisable, il devient très facile de calculer la puissance $n^{\text{ème}}$ de A.

Démonstration

Initialisation : Au rang $n = 1$, on a : $A = PDP^{-1}$ car A est diagonalisable.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $A^n = PD^nP^{-1}$. Démontrons que :

$$\boldsymbol{A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}}$$

$$A^{n+1} = A \times A^n = PDP^{-1} \times PD^nP^{-1} = PD \times D^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

Conclusion : Donc pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = PD^nP^{-1}$