COURS : FONCTIONS LINÉAIRES & AFFINES

Extrait du programme de la classe de troisième :

CONTENU	COMPÉTENCES EXIGIBLES	COMMENTAIRES
Fonction linéaire.	Connaître la notation $x \longmapsto ax$, pour une valeur numérique de a fixée. Déterminer l'expression algébrique d'une fonction linéaire à partir de la donnée d'un nombre non nul et de son image. Représenter graphiquement une fonction linéaire. Lire sur la représentation graphique d'une fonction linéaire l'image d'un nombre donné et le nombre ayant une image donnée.	La définition d'une fonction linéaire, de coefficient a, s'appuie sur l'étude des situations de proportionnalité rencontrées dans les classes précédentes. On pourra recourir à des tableaux de proportionnalité et on mettra en évidence que le processus de correspondance est "je multiplie par a". Pour des pourcentages d'augmentation ou de diminution, une mise en évidence similaire peut être faite ; par exemple, augmenter de 5 % c'est multiplier par 1,05 et diminuer de 5 % c'est multiplier par 0,95. L'étude de la fonction linéaire est aussi une occasion d'utiliser la notion d'image. On introduira la notation $x \longmapsto ax$, pour la fonction. À propos de la notation des images $f(2)$, $f(-0,25)$, ..., on remarquera que les parenthèses y ont un autre statut qu'en calcul algébrique. L'énoncé de Thalès permet de démontrer que la représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine ; cette droite a une équation de la forme $y = ax$. On interprétera graphiquement le nombre a, coefficient directeur de la droite. C'est une occasion de prendre conscience de l'existence de fonctions dont la représentation graphique n'est pas une droite (par exemple, en examinant comment varie l'aire d'un carré quand la longueur de son côté varie de 1 à 3).
Fonction affine. Fonction affine et fonction linéaire associée.	Connaître la notation $x \longmapsto ax + b$ pour des valeurs numériques de a et b fixées. Déterminer une fonction affine par la donnée de deux nombres et de leurs images. Représenter graphiquement une fonction affine. Lire sur la représentation graphique d'une fonction affine l'image d'un nombre donné et le nombre ayant une image donnée.	Pour des valeurs de a et b numériquement fixée, le processus de correspondance sera aussi explicité sous la forme "je multiplie par a, puis j'ajoute b". La représentation graphique de la fonction affine peut être obtenue par une translation à partir de celle de la fonction linéaire associée. C'est une droite, qui a une équation de la forme $y = ax + b$. On interprétera graphiquement le coefficient directeur a et l'ordonnée à l'origine b ; on remarquera la proportionnalité des accroissements de x et y. Pour déterminer la fonction affine associée à une droite donnée dans un repère, on entraînera les élèves à travailler à partir de deux points pris sur la droite et à exploiter la représentation graphique. On fera remarquer qu'une fonction linéaire est une fonction affine. Des enregistrements graphiques ou des courbes représentatives de fonctions non affines peuvent servir de support à la construction de tableaux de valeurs ou à la recherche de particularités d'une fonction : coordonnées de points, sens de variation sur un intervalle donné, maximum, minimum. Aucune connaissance spécifique n'est exigible sur ce sujet.

1 Fonction linéaire

1.1 Définitions

L'unité de longueur est le centimètre. Notons x la longueur du côté d'un carré et y le périmètre de ce carré. On trouve :

x	1	0,8	3
y	4	3,2	12

$\times 4$

On obtient un tableau de proportionnalité : le périmètre d'un carré est proportionnel à son côté et 4 est le coefficient de proportionnalité. On peut écrire $y = 4 \times x$ ou $y = 4x$.

Définition :
Soit a un nombre quelconque « fixe ».
Si, à chaque nombre x, on peut associer son produit par a (c'est à dire $y = a \times x$), alors on définit **la fonction linéaire** de **coefficient** a, que l'on notera $f : x \longmapsto ax$.

Vocabulaire et notation :
La fonction qui, à chaque nombre x, associe le périmètre du carré de côté x est une **fonction linéaire** de **coefficient** 4, que nous pouvons noter $f : x \longmapsto 4x$. L'**image** de $0,8$ par cette fonction est $3,2$, ce que l'on peut noter $\boxed{f(0,8) = 3,2}$ (et qui se lit " f de $0,8$ est égal à $3,2$")

Fonction linéaire de coefficient a :

Nombre $\longmapsto$ Image

$x \longmapsto ax$

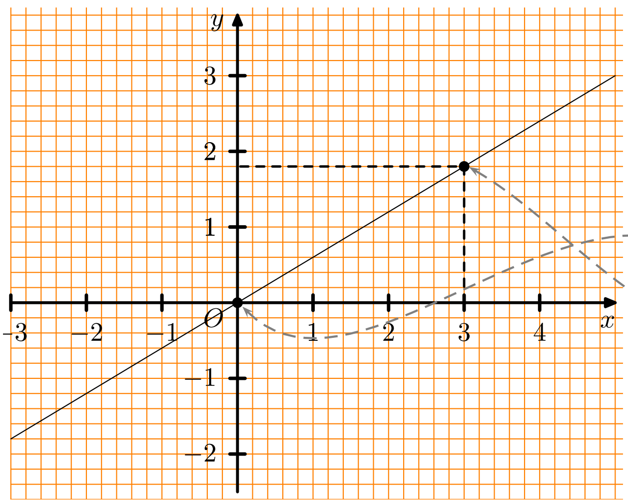
$\times a$

Remarque : Une fonction linéaire de coefficient a représente une situation de **proportionnalité** (dans laquelle le coefficient de proportionnalité est égal à a). Pour passer d'un nombre à son image, on **multiplie par** a.

1.2 Représentation graphique d'une fonction linéaire

Propriété :
Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction linéaire de coefficient a est une **droite passant par l'origine du repère**.

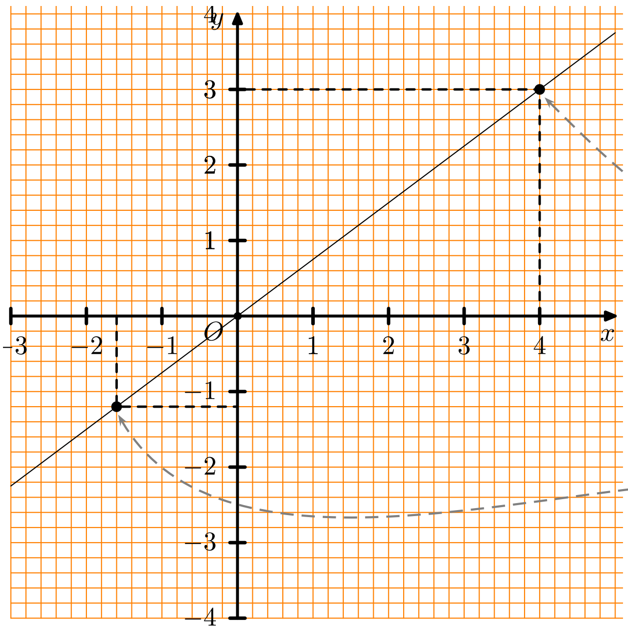
► **Représenter graphiquement une fonction linéaire**



Ci-contre est représentée graphiquement la fonction linéaire f de coefficient $0,6$, que l'on peut noter $f : x \mapsto 0,6x$
Comme f est une fonction linéaire, sa représentation graphique est une droite qui passe par $\boxed{\text{l'origine du repère}}$.
De plus, pour trouver un second point de cette droite, on peut calculer l'image de 3 : $f(3) = 0,6 \times 3 = 1,8$.
Je place $\boxed{\text{le point de coordonnées } (3;1,8)}$.
En fait, voici un **tableau de valeurs** de cette fonction :

x	0	3
y	0	1,8

► **Lire sur la représentation graphique d'une fonction linéaire l'image d'un nombre donné et le nombre ayant une image donnée.**



Ci-contre est représentée graphiquement une fonction linéaire f de coefficient a, que l'on peut noter $f : x \mapsto ax$

Pour lire l'image (*par exemple*) du nombre 4 sur cette représentation graphique, on commence par repérer $\boxed{\text{le point de la droite dont l'}\textbf{abscisse}\text{ est 4}}$, puis on lit l'**ordonnée** de ce point. Ici, on peut lire que $\boxed{\text{l'image de 4 est 3}}$, c'est-à-dire que $f(4) = 3$

De plus, pour trouver le nombre dont l'image est −1,2 par cette fonction linéaire, on commence par repérer $\boxed{\text{le point de la droite dont l'}\textbf{ordonnée}\text{ est } -1{,}2}$, puis on lit l'**abscisse** de ce point. Ici, on peut lire que $\boxed{\text{le nombre dont l'image est } -1{,}2 \text{ est } -1{,}6}$, c'est-à-dire que $f(-1{,}6) = -1{,}2$.

► **Déterminer le coefficient d'une fonction linéaire, lorsqu'on connaît un nombre et son image**

Dans l'exemple précédent, on considère une fonction linéaire de coefficient a inconnu, que l'on note $f : x \longmapsto ax$. Or nous avons vu que l'image de 4 par cette fonction est égale à 3 ; cela signifie que $3 = a \times 4$, ce qui nous permet de déterminer le coefficient de la fonction : $a = \frac{3}{4} = 0{,}75$.

Remarque : ce nombre a n'est autre que le coefficient de proportionnalité du tableau suivant :

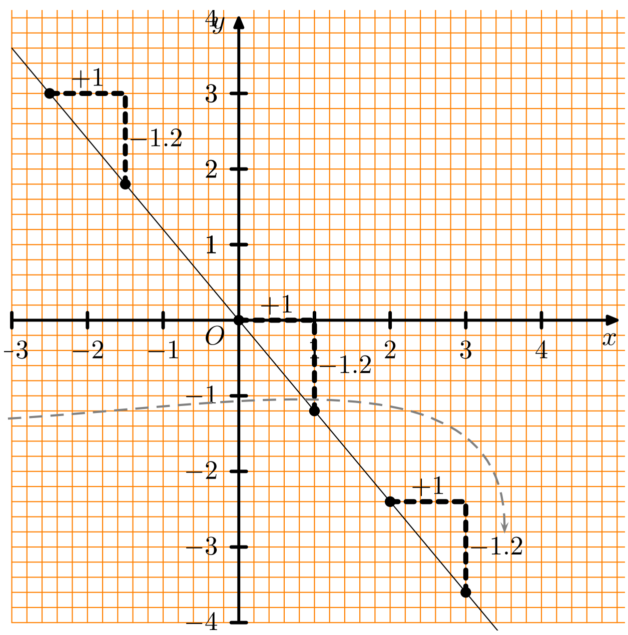
x	4	−1,6
y	3	1,2

$\times a$

Définitions :
Soit (d) la droite qui représente graphiquement la fonction linéaire de coefficient a.
On dit alors que a est **le coefficient directeur** de la droite (d) et que $y = ax$ est une **équation de la droite** (d).

► **Interprétation graphique du coefficient directeur** :

Soit (d) la droite qui représente graphiquement la fonction linéaire de coefficient −1,2 ; le **coefficient directeur** de la droite (d) est donc $\boxed{-1{,}2}$, et son équation est $y = -1{,}2\,x$.
Graphiquement, voici comment lire le coefficient directeur :



1.3 Fonction linéaire et pourcentage

Calculer avec des pourcentages :

► Prendre $t\,\%$ d'un nombre, c'est multiplier ce nombre par $\dfrac{t}{100}$.

► Augmenter un nombre de $t\,\%$, c'est multiplier ce nombre par $\left(1+\dfrac{t}{100}\right)$.

► Diminuer un nombre de $t\,\%$, c'est multiplier ce nombre par $\left(1-\dfrac{t}{100}\right)$.

Exemples

► Prendre 15 % de x c'est effectuer $x\times\dfrac{15}{100}$. A cette action, on associe la fonction linéaire $x\mapsto 0,15\times x$.

► Diminuer un nombre x de 12 % c'est effectuer $x\times\left(1-\dfrac{12}{100}\right)=x\times 0,88$. A cette action, on associe la fonction linéaire $x\mapsto 0,88\times x$.

► Augmenter un nombre x de 3 % c'est effectuer $x\times\left(1+\dfrac{3}{100}\right)=x\times 1,03$. A cette action, on associe la fonction linéaire $x\mapsto 1,03\times x$.

2 Fonction affine

2.1 Définitions

Définition :
Soient a et b deux nombres quelconques « fixes ».
Si, à chaque nombre x, on peut associer le nombre $a\times x+b$, alors on définit **une fonction affine**, que l'on notera $f:\ x\longmapsto ax+b$.
On dit que $x\mapsto ax$ est la **fontion linéaire associée** à la fonction affine $x\mapsto ax+b$.

Vocabulaire et notation :
La fonction qui, à chaque nombre x, associe le nombre $2x+3$ est une **fonction affine** (où $a=2$, et $b=3$), que nous pouvons noter $f:\ x\longmapsto 2x+3$. L'**image** de 5 par cette fonction est $2\times5+3=13$, ce que l'on peut noter $\boxed{f(5)=13}$.

Fonction affine

$$\begin{array}{ccccc} \text{Nombre} & \longmapsto & & \longmapsto & \text{Image} \\ x & \xrightarrow{\times a} & ax & \xrightarrow{+b} & ax+b \end{array}$$

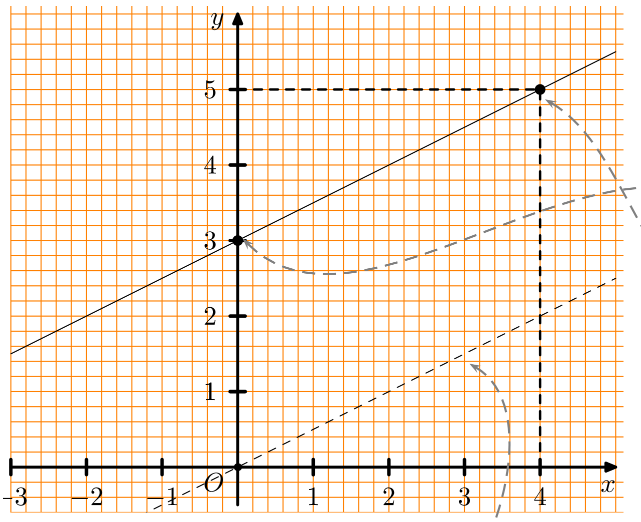
Remarque 1 : Pour passer d'un nombre à son image, on **multiplie par** a, puis **on ajoute** b.
Remarque 2 : Lorsque $b=0$ On obtient $f:x\mapsto ax$, c'est à dire une fonction **linéaire**.

2.2 Représentation graphique d'une fonction linéaire

Propriété :
Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction affine est une **droite** :

- passant par le point de coordonnées $(0;b)$
- qui est parallèle à la droite représentant la fonction linéaire associée

► Représenter graphiquement une fonction affine



Ci-contre est représentée graphiquement la fonction affine $f : x \mapsto 0,5x + 3$

Comme f est une fonction affine, sa représentation graphique est une droite qui passe par $\boxed{\text{le point de coordonnées } (0;3)}$.

De plus, pour trouver un second point de cette droite, on peut calculer, par exemple, l'image de 4 : $f(4) = 0,5 \times 4 + 3 = 5$.

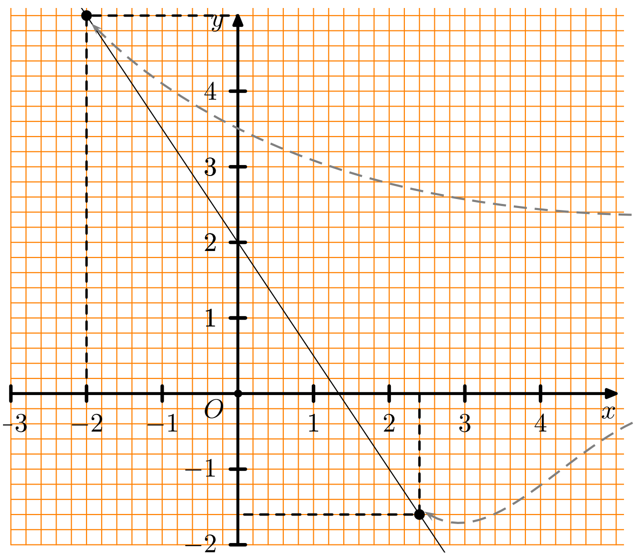
Je place $\boxed{\text{le point de coordonnées } (4;5)}$.

En fait, voici un **tableau de valeurs** de cette fonction :

x	0	4
y	3	5

Remarquez que la droite représentant cette fonction ($x \longmapsto 0,5x + 3$) est **parallèle** à la droite représentant la fonction linéaire associée ($x \longmapsto 0,5x$).

► Lire sur la représentation graphique d'une fonction affine l'image d'un nombre donné et le nombre ayant une image donnée.



Ci-contre est représentée graphiquement une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$

Pour lire l'image (*par exemple*) du nombre -2 sur cette représentation graphique, on commence par repérer $\boxed{\text{le point de la droite dont l'}\textbf{abscisse}\text{ est } -2}$, puis on lit l'**ordonnée** de ce point. Ici, on peut lire que $\boxed{\text{l'image de } -2 \text{ est } 5}$, c'est-à-dire que $f(-2) = 5$

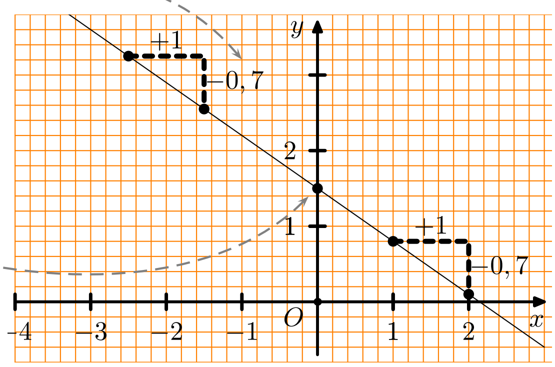
De plus, pour trouver le nombre dont l'image est $-1,6$ par cette fonction, on commence par repérer $\boxed{\text{le point de la droite dont l'}\textbf{ordonnée}\text{ est } -1,6}$, puis on lit l'**abscisse** de ce point. Ici, on peut lire que $\boxed{\text{le nombre dont l'image est } -1,6 \text{ est } 2,4}$, c'est-à-dire que $f(2,4) = -1,6$.

Définitions :

Soit (d) la droite qui représente graphiquement la fonction affine $f : x \longmapsto ax + b$.

On dit alors que a est **le coefficient directeur** de la droite (d), que b est **l'ordonnée à l'origine**, et que $y = ax + b$ est une **équation de la droite** (d).

► Interprétation graphique du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine :



Soit (d) la droite qui représente graphiquement la fonction affine $x \longmapsto -0,7x + 1,5$; le **coefficient directeur** de la droite (d) est donc $\boxed{-0,7}$, son **ordonnée à l'origine** est $\boxed{1,5}$ et son **équation** est $y = -0,7\,x + 1,5$.

Graphiquement, voici comment lire le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine :

▸ **Déterminer l'expression d'une fonction affine, lorsqu'on donne deux nombres et leurs images**

Exemple : Déterminer la fonction affine f tel que $f(1) = 4$ et $f(3) = 8$.
Une application affine est de la forme $x \mapsto ax + b$.
De $f(1) = 4$, on tire $a \times 1 + b = 4$, c'est-à-dire $\boxed{a + b = 4}$ (égalité n°1)
De $f(3) = 8$, on tire $a \times 3 + b = 8$, c'est-à-dire $\boxed{3a + b = 8}$ (égalité n°2)

Calcul de a :
Si on **soustrait membre à membre** les deux égalités encadrées ci-dessus,
on obtient $\boxed{(a + b) - (3a + b) = 4 - 8}$,
ce qui nous donne $a + b - 3a - b = -4$,
c'est-à-dire $-2a = -4$,
ce qui nous permet d'**obtenir la valeur de** a :
$\boxed{a = \frac{-4}{-2} = 2}$.

Calcul de b :
On reprend l'une des deux égalités (n°1 ou n°2), et on remplace a par la valeur trouvée, pour calculer la valeur de b :
Comme on a trouvé $a = 2$, on reprend (par exemple) l'égalité n°1, et on y remplace a par 2 :
$\boxed{a + b = 4}$ qui donne $2 + b = 4$, et donc
$\boxed{b = 4 - 2 = 2}$.

La fonction affine recherchée, qui vérifie $f(1) = 3$ et $f(3) = 8$, est donc la fonction $\boxed{f : x \longmapsto 2x + 2}$

2.3 Proportionnalité des accroissements

Une fonction linéaire modélise une situation de proportionnalité ; ce n'est pas le cas d'une fonction affine, comme on peut s'en convaincre en observant le tableau de valeurs de la fonction $f : x \longmapsto 0,2x - 1$, reproduit ci-dessous :

x	1	2	4	7	11
$f(x)$	$-0,8$	$-0,6$	$-0,2$	$0,4$	$1,2$

Ce tableau n'est manifestement pas un tableau de proportionnalité. Cependant, regardons ce qui se passe lorsque l'on regarde les accroissements de cette fonction :

Lorsque x augmente de …	1	2	3	4	5	6	7
alors $f(x)$ augmente de …	$0,2$	$0,4$	$0,6$	$0,8$	1	$1,2$	$1,4$

Ce tableau est un tableau de proportionnalité, et le coefficient de proportionnalité est $0,2$!
Ceci nous amène à énoncer la propriété suivante :

Propriété :
Soit f une fonction affine $x \mapsto ax + b$.
Si x varie (c'est à dire augmente ou diminue) d'un nombre h, alors son image $f(x)$ varie de ah. Autrement dit, si $x_1 - x_2 = h$, alors $f(x_1) - f(x_2) = ah$: les accroissements de $f(x)$ sont proportionnels aux accroissements de x, et le coefficient de proportionnalité est a.

▸ **Déterminer l'expression d'une fonction affine, lorsqu'on donne deux nombres et leurs images (2)**

Soit f une fonction affine, telle que $f(1) = 5$ et $f(4) = 7$.

Calcul de a :
Comme on sait que les accroissements de $f(x)$ sont proportionnels aux accroissements de x, et que le coefficient de proportionnalité est a, on peut écrire que $f(4) - f(1) = a \times (4 - 1)$, ce qui nous donne $7 - 5 = a(4 - 1)$, c'est-à-dire $\boxed{a = \frac{7-5}{4-1} = \frac{2}{3}}$

Calcul de b :
On sait que f est une fonction affine, et donc qu'on peut écrire son expression : $f : x \longmapsto ax + b$; en particulier, on a $f(1) = a \times 1 + b$. Or, on a vu que $a = \frac{2}{3}$: on a donc $f(1) = \frac{2}{3} + b$. De plus, on sait que $f(1) = 5$; on a donc $5 = \frac{2}{3} + b$, qui donne $\boxed{b = 5 - \frac{2}{3} = \frac{13}{3}}$

La fonction affine recherchée, qui vérifie $f(1) = 5$ et $f(4) = 7$, est donc $f : x \longmapsto \frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$