TRIGONOMETRIE

Table des matières

I. ANGLES ORIENTES

1. Le radian

Définition : Le radian est une unité de mesure d'un angle comme le degré. Il est défini comme la longueur de l'arc entre deux points du cercle unité. Le demi-cercle unité ayant une longueur de π, on a $180° = \pi\, rd$

La mesure d'un degré en radian vaut :

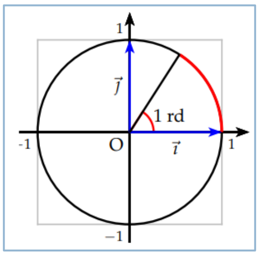
$$1\, rd = \frac{180}{\pi} = 57°$$

Voici un tableau qui donne la conversion de quelque angle remarquable :

Degré	30°	45°	60°	90°
Radian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

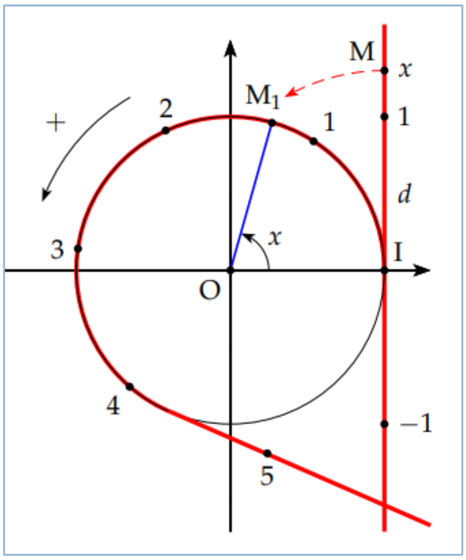
Remarque : le tableau précédent est un tableau de proportionnalité de coefficient : $k = \frac{\pi}{180}$

Le cercle unité est aussi appelé le cercle trigonométrique :



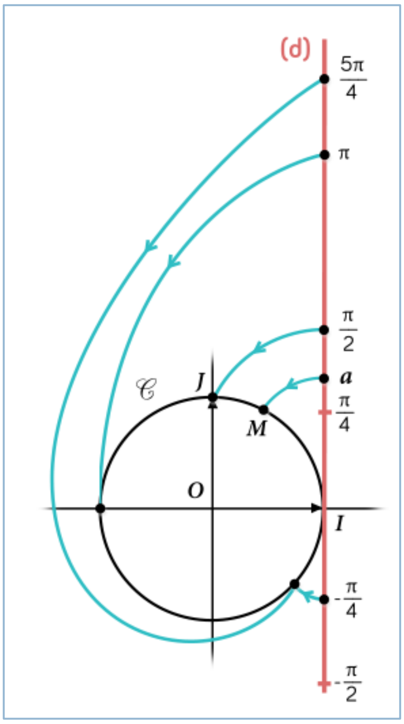
2. Angle défini sur l'ensemble des réels

Définition : On appelle d la droite tangente au cercle unité en I. A un point $M(1; x)$ de la droite d, on associe un point M_1 par enroulement de d sur le cercle unité. Au réel x, on associe alors l'angle en radian, formé par les points O, I et M_1 compté positivement ou négativement suivant le sens de la rotation. Le sens positif ou trigonométrique est le sens inverse des aiguilles d'une montre.



Remarque :

- Si on choisit un point M sur la droite, on va trouver un unique point M_1 sur le cercle trigonométrique.
- Si on choisit un point M_1 sur le cercle, alors il y a une infinité de points M sur la droite qui lui correspondent.



Cela signifie qu'il y a une infinité d'angles en radian qui correspondent au même point sur le cercle trigonométrique.

Exemple :

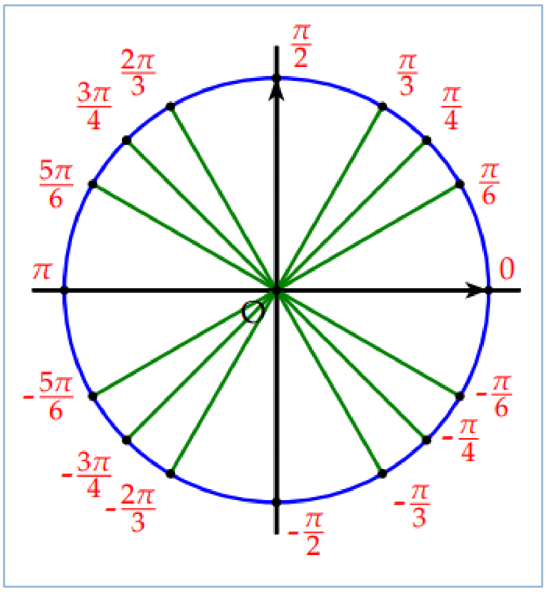
Les angles π et 3π correspondent au même point sur le cercle trigonométrique car $3\pi - \pi = 2\pi$, ce qui correspond à un tour complet.

De même les angles $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{13\pi}{6}$ correspondent au même point sur le cercle trigonométrique car leur différence vaut 2π.

De manière générale, si l'écart entre deux angles en radian x et x' vaut un multiple de 2π à savoir $x - x' = k \times 2\pi$ où k est un entier relatif, alors les deux points du cercle correspondants sont confondus.

3. Angles remarquables sur le cercle

Voici les angles remarquables sur le cercle trigonométrique dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$:

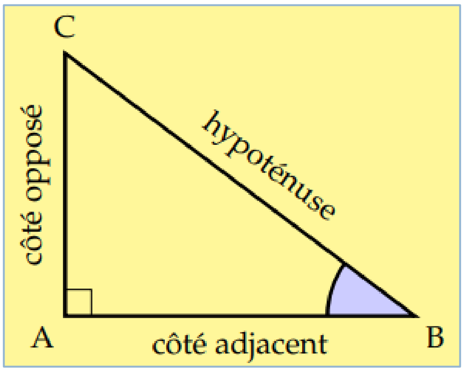


II. TRIGONOMETRIE

1. Dans le triangle rectangle

Définition : Dans un triangle ABC rectangle en A, on définit les rapports suivants :

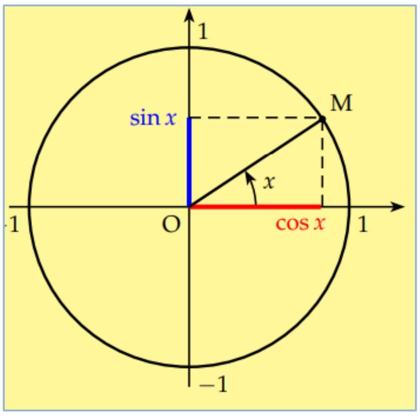
- $\sin(\hat{B}) = \frac{côté\ opposé}{hypoténuse}$
- $\cos(\hat{B}) = \frac{côté\ adjacent}{hypoténuse}$
- $\tan(\hat{B}) = \frac{côté\ oppcosé}{côté\ adjacent}$



2. Définition

Définition : M est le point du cercle trigonométrique associé au réel x :

- $\cos(x) = abscisse\ du\ point\ M$
- $\sin(x) = ordonnée\ du\ point\ M$
- $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$



Par conséquent :

- $-1 \leq \sin(x) \leq 1\ et - 1 \leq \cos(x) \leq 1$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

3. Tableau des angles remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

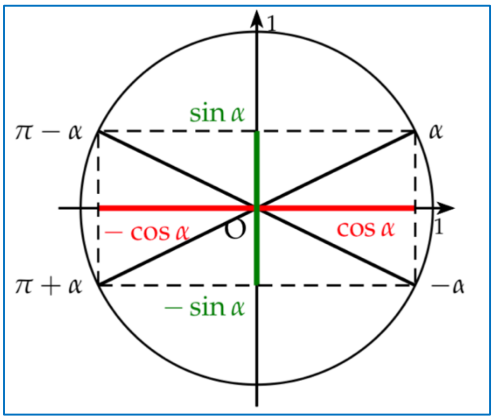
Démonstration : Voir la partie exercice de ce chapitre.

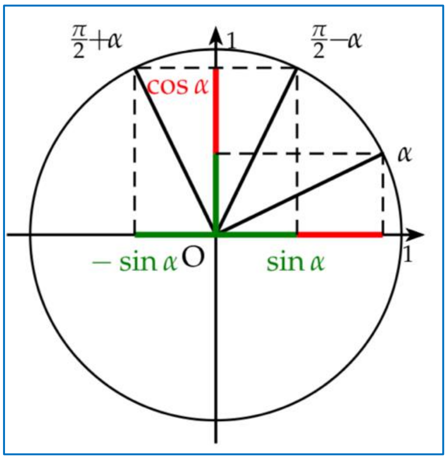
Ces résultats sont à connaitre par cœur.

4. Relations trigonométriques

- $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos(x) \leq 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(x) \leq 1$

- $cos^2(x) + sin^2(x) = 1$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
- $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$
- $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$





5. Equations trigonométriques

Soit a un nombre réel compris dans l'intervalle : $[-1; 1]$. On considère l'équation :

$$\cos(x) = a$$

On trouve d'abord un angle α tel que $\cos(x) = \cos(\alpha)$

Ensuite on donne les solutions sous la forme : $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$ où k est un entier.

De même on peut résoudre les équations sous la forme $\sin(x) = a$

On trouve d'abord un angle α tel que $\sin(x) = \sin(\alpha)$, puis on donne les solutions sous la forme :

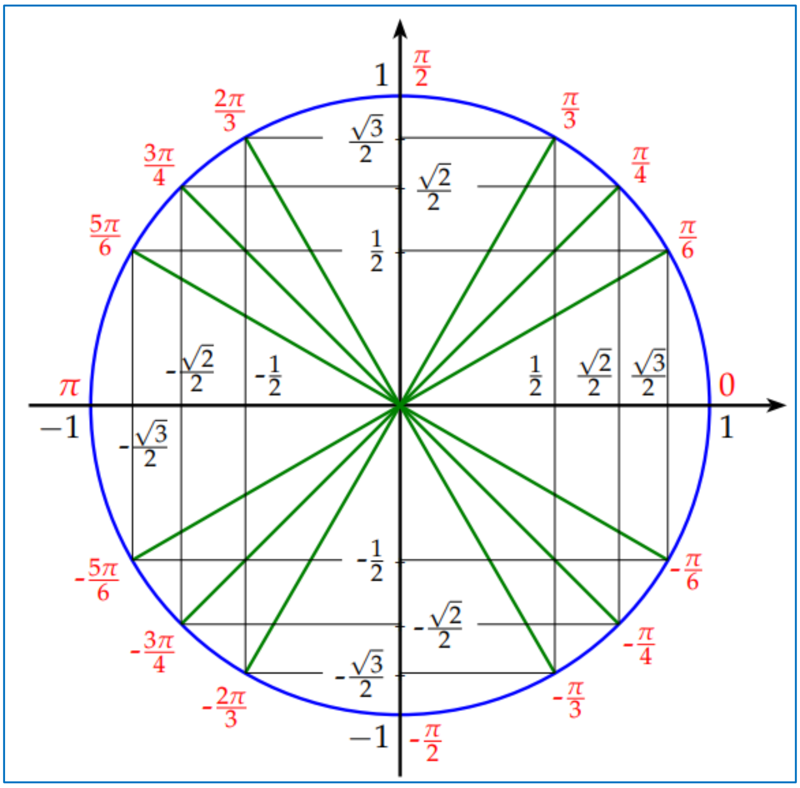
$x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$

Exercice d'application

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$2\sin(x) + \sqrt{3} = 0$$

6. Lignes trigonométriques dans le cercle



III. FONCTIONS SINUS ET COSINUS

1. Définition

Définition : Les fonctions sinus et cosinus, notés cos et sin, sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} \sin\ :\ \mathbb{R} &\longrightarrow [-1\,;\,1] \\ x &\longmapsto \sin x \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \cos\ :\ \mathbb{R} &\longrightarrow [-1\,;\,1] \\ x &\longmapsto \cos x \end{aligned}$$

Rmarque : Comme à tout réel x on peut associer un angle, les fonctions sin et cos sont tout naturellement définies sur $\mathbb{R}$. On devrait en toute rigueur écrire $\sin(x)$ et non $\sin x$ mais l'usage préfère la notation $\sin x$ sans parenthèses, plus simple.

2. Propriétés

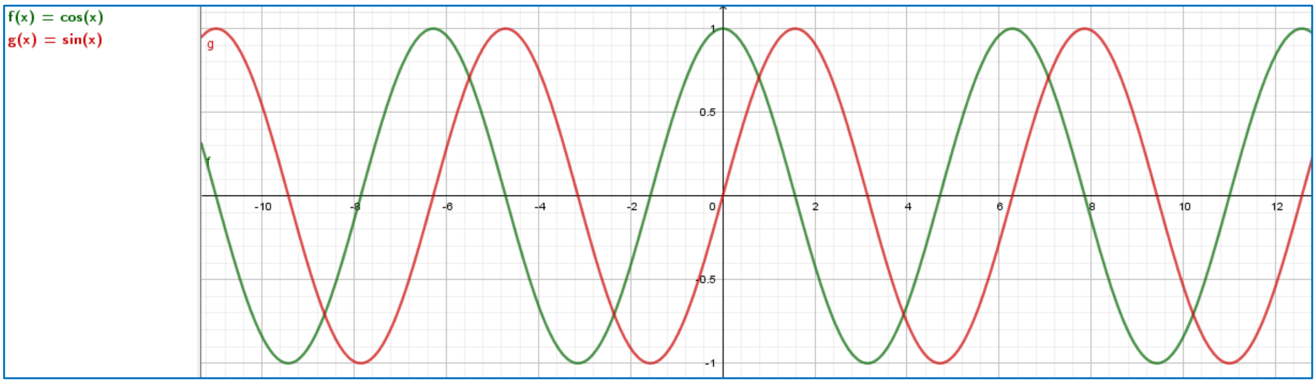
Propriétés : Les fonctions sin et cos sont 2π −périodiques :

- $\forall\ x \in \mathbb{R}, \sin(x + 2\pi) = \sin x$
- $\forall\ x \in \mathbb{R}, \cos(x + 2\pi) = \cos x$

Les fonctions sin et cos sont respectivement impaires et paires :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin x$
- $\forall\ x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos x$

Leur courbes représentatives sont donc symétriques respectivement par rapport à l'origine et à l'axe des ordonnées.



3. Variations

Théorème : les fonctions sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$:

- $sin'(x) = \cos(x)$
- $\cos'(x) = -\sin(x)$

Exercice d'application : Etudier les variations des fonctions sin et cos sur $\mathbb{R}$: